

TESIS CARRERA DE DOCTORADO EN FÍSICA

**VISIÓN EN COLOR: ANÁLISIS ESTADÍSTICO DE LA
ABSORCIÓN DE FOTONES EN LA RETINA Y SUS
CONSECUENCIAS PERCEPTUALES**

Mgter. María da Fonseca
Doctoranda

Dra. Inés Samengo
Directora

Junio de 2018

Departamento de Física Médica – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

A Emma

Índice de contenidos

Índice de contenidos	v
Resumen	vii
Abstract	ix
1. Introducción	1
1.1. Los orígenes: el color como una propiedad objetiva	1
1.2. El color como una sensación del observador	2
1.3. Etapas del procesamiento visual	3
1.4. Daltónicos y tetracrómatas	6
1.5. Metamerismo	8
1.6. Sensibilidad a la luminosidad	9
1.7. Funciones de color matching	10
1.8. Espacios de color	11
1.9. Discriminación cromática	15
2. Métodos	19
2.1. Representaciones del color	19
2.2. La geometría de Fisher	22
2.2.1. Transformación al espacio CIE xy 1931	28
2.2.2. Transformación al espacio DKL	29
3. El modelo	31
3.1. Estadística de la lluvia de fotones	32
3.1.1. Emisión de fotones de una fuente de luz monocromática y confiable	32
3.1.2. Emisión de fotones de una fuente de luz monocromática no confiable	36
3.1.3. Emisión de fotones de una fuente de luz con un espectro arbitrario y no confiable	37
3.2. Conclusión	40

4. Estimaciones del estímulo presentado	41
4.1. Estimación del color presentado	42
4.2. Reconstrucción de la función de luminosidad aparente	43
4.3. Conclusión	46
5. Discriminación cromática	47
5.1. Discriminación entre dos longitudes de onda cercanas	47
5.1.1. Discriminación entre dos longitudes de onda cercanas por dicrómatas y tetracrómatas	50
5.2. Discriminación entre dos haces compuestos por diferentes longitudes de onda	53
5.2.1. Discriminación en el espacio CIE 1931 xy	54
5.2.2. Discriminación en el espacio DKL	58
5.3. Conclusión	60
6. Espacio perceptualmente uniforme	61
6.1. Espacios casi perceptualmente uniformes	61
6.2. Receta para obtener un espacio perceptualmente uniforme	63
6.3. Espacio perceptualmente uniforme a partir del modelo descrito en el capítulo 3	65
6.4. Conclusión	70
7. Funciones de color matching	73
7.1. Introducción	73
7.2. Predicción de las color matching functions originales	74
7.3. Predicción de las color matching functions más ortogonales	80
7.4. Predicción de color matching functions positivas	81
7.5. Conclusión	82
8. Conclusiones	85
Bibliografía	91
Publicaciones asociadas	97
Agradecimientos	99

Resumen

El color es una sensación subjetiva originada en el cerebro, basada en la información que llega por la vía visual sobre la distribución de energía de la luz que incide sobre la pupila. Los fotorreceptores constituyen la primera etapa en el procesamiento neuronal de la información cromática, por lo tanto, es esperable que parte de las características de la visión en color puedan explicarse en términos de la fisiología del proceso de absorción de fotones. Sin embargo, existen numerosas etapas de procesamiento posteriores, todas ellas requeridas para que un observador sea capaz de reportar qué color ve, así como para informar si nota diferencias entre dos estímulos o si los percibe como iguales. Por lo tanto, no hay motivos para creer que basta comprender la fisiología de los fotorreceptores para poder explicar todas las características de la percepción cromática. Para determinar la relevancia del proceso de absorción, en esta tesis modelamos estadísticamente la forma en que los conos de la retina capturan los fotones incidentes. Bajo la suposición de que la estocasticidad del proceso de absorción constituye el factor fundamental que limita la precisión de la percepción cromática, utilizando técnicas estadísticas y de la teoría de la información, predecimos el resultado de diversos experimentos comportamentales reportados en la literatura. La precisión con que se reproducen los resultados experimentales sustenta la hipótesis de que las etapas de procesamiento posteriores operan de manera óptima, o cercana a la óptima, alterando sólo mínimamente las limitaciones impuestas por la etapa de absorción.

Palabras clave: PERCEPCIÓN CROMÁTICA, TEORÍA DE LA INFORMACIÓN, VISIÓN

Abstract

Colour is a subjective sensation originated in the brain, based on the information that enters through the visual pathway about the energy distribution of the light impinging on the pupil. Fotoreceptors constitute the first stage in the neuronal processing of chromatic information, so the physiology of the absorption process is expected to be relevant in the understanding of colour vision. There are, however, multiple subsequent processing stages, all of them required for an observer to be able to report the colour of a stimulus, and to determine whether he or she perceives two stimuli as chromatically equal or not. There is no reason, hence, to believe that photoreceptors suffice to explain all the properties of chromatic perception. To determine the relevance of the absorption process, in this thesis we construct a statistical model of the way incident photons are captured by the cones of the retina. Under the assumption that the stochasticity in the absorption process is the fundamental factor limiting the precision of chromatic perception, using statistical and information-theoretical tools, we predict the result of several behavioral experiments reported in the literature. The precision with which the model reproduces the experimental results supports the hypothesis that subsequent processing stages operate optimally, or near optimality, altering only minimally the limitations imposed by the absorption process.

Keywords: COLOR PERCEPTION, INFORMATION THEORY, VISION

Capítulo 1

Introducción

“Quisiera saber algo, ¿qué es el color?”

— Pablo Picasso

Los colores están presentes en la vida de todos los seres humanos, tanto que no podemos abstraernos de ellos. Por más esfuerzo que pongamos, no podemos ver en blanco y negro a voluntad. Abrir los ojos implica ver objetos cuyas superficies parecen estar pintadas de color. Tonos verdes aparecen en las hojas de los árboles, azules y rojos en el cielo, amarillos, naranjas y violetas en las frutas. Muchos de nosotros nos hemos preguntado a lo largo de nuestras vidas acerca de la naturaleza del color, y en gran medida, este trabajo tiene un genuino origen en esos interrogantes.

1.1. Los orígenes: el color como una propiedad objetiva

El estudio del color tiene diferentes aristas que van desde cómo medirlos de manera precisa hasta cuál es la mejor manera de nombrarlos. Hoy nos preguntamos sobre muchos aspectos de la visión en colores mientras que otros aspectos ya los tenemos tan incorporados que nos parecen obvios gracias a que formaron parte de la construcción del conocimiento a lo largo de la historia. Una construcción tejida con las respuestas alcanzadas por pensadores, filósofos, y científicos motivados por intereses no tan distintos a los nuestros. Ideas acerca de cómo percibimos el mundo en colores datan de siglos antes de Cristo. La noción de que categorizamos el espacio continuo de colores en categorías discretas [1, 2], por ejemplo, tiene orígenes en la Grecia antigua donde Empédocles introdujo la idea de que hay un número finito de colores básicos (V a.C) [3]. Más adelante, Demócrito los limitó al número cuatro: negro, blanco, rojo y amarillo. Cualquier color existente debía ser el resultado de mezclar esos cuatro colores que además estaban relacionados con elementos fundamentales, mármol pulverizado para

el blanco, hueso carbonizado u hollín para el negro, mercurio para el rojo, y el color de la tierra (ocre) para el amarillo. Demócrito pensaba que estos cuatro colores correspondientes a estos cuatro elementos estaban hechos de átomos con diferentes arreglos espaciales. Platón tomó varias de las ideas de Demócrito y escribió que partículas de diferentes tamaños devenían en diferentes movimientos y por ende en sensaciones diferentes de color [3]. Los romanos y arábigos incorporaron estas ideas y así fue como permanecieron hasta el Renacimiento.

Hasta ese momento, los colores estaban intrínsecamente ligados a los materiales, como si el color fuese una propiedad física de esos materiales, o una propiedad inherente de las superficies. Y algunos aspectos de esta idea prevalecen al día de hoy porque tendemos a pensar que las superficies de los elementos que nos rodean están coloreadas, tan coloreadas como el papel que estoy pintado con este crayón azul o mis dedos teñidos de morado después de comer cerezas con la mano. Si tomo un trozo de madera puedo decir que presenta distintos tonos marrones, tiene 20 cm de ancho, 31 de largo, y pesa 500 gramos. Es natural pensar al color como una característica propia de las superficies, así como lo son sus dimensiones o su peso. Sin embargo, no existe una medida física simple que defina el color, ya que el color es el resultado de una serie de procesos que se inician en la retina y terminan en la corteza cerebral. En 1665, el científico inglés Robert Hooke expuso que percibimos los colores de manera diferente según el ángulo con el que los pulsos de luz impactan sobre la retina [3]. Unos pocos años después, Newton observó que al pasar luz blanca por un prisma se desplegaban todos los colores del arco iris. Concluyó en ese momento que este fenómeno debía introducir aberraciones cromáticas en los telescopios y aplicó sus conocimientos en la construcción del telescopio reflectivo presentando su teoría del color ante la Royal Society of London. En ella mantuvo la idea de que las mezclas de colores primarios pueden crear todos los colores, y agregó el hecho de que el blanco no es un color básico, sino el resultado de combinar todos los colores del espectro. Más tarde, también demostró que el gris es una versión menos luminosa del blanco. Newton introdujo ideas reveladoras en materia de color, sin embargo, cometió un error cuando hizo un paralelo entre la escala de las notas musicales y los colores del espectro. Hipotetizó que la relación entre las bandas de los colores del arco iris formaban una octava como las frecuencias de las notas musicales, y hoy sabemos que no es así [2, 3].

1.2. El color como una sensación del observador

Una vez que entendemos que la naturaleza del color tiene cierta relación con el ojo, la retina y por ende, con el observador, nos preguntamos si el color depende de quien lo observe. Si el color es una experiencia subjetiva, la amarillez del amarillo que veo, ¿es tan amarilla como la amarillez que experimenta mi compañero? ¿Existirá la

inversión de color? Si disponemos los colores conocidos en un círculo cromático como nos enseñaron en la clase de plástica del colegio (ver figura 1.1), este paradigma suena



Figura 1.1: Círculo cromático.

bastante plausible. Y pensar que lo que yo veo como rojo otros lo ven verde, así como mis amarillos son sus violetas podría ser razonable. Por otro lado, si bien es cierto que se puede medir la longitud de onda de un haz monocromático, hacer una correlación entre esa longitud de onda y un color determinado no es evidente, porque el color depende de quién lo observe. Somos nosotros quienes reportamos el color que estamos observando, y por ende se podría pensar también como una experiencia totalmente subjetiva. Hoy por hoy sabemos que el color es la sensación que experimentamos al abrir los ojos y mirar una superficie iluminada, y que es el resultado de la comunicación entre billones de neuronas que terminan en la experiencia consciente de poder reportar las características cromáticas de esa sensación.

1.3. Etapas del procesamiento visual

La información lumínica recorre distintas estaciones en el cerebro que componen el camino del sistema visual. La luz llega a nuestros ojos cuyo aferente es el nervio óptico (ver figura 1.2) quien es el encargado de llevar la información al núcleo geniculado lateral, y a su vez, la salida de sus neuronas llegan, vía radiaciones ópticas, a la corteza visual primaria [4]. La información del color viaja entonces hasta la corteza prefrontal y es en esa instancia donde el sujeto experimenta la sensación consciente del color de la luz que iluminó su retina.

La retina es la primera porción de sistema nervioso involucrada en la percepción visual. Ella se encuentra en la parte posterior del globo ocular, tal como se muestra en la figura 1.3, y está formada por un arreglo de tres capas de neuronas. La luz incide

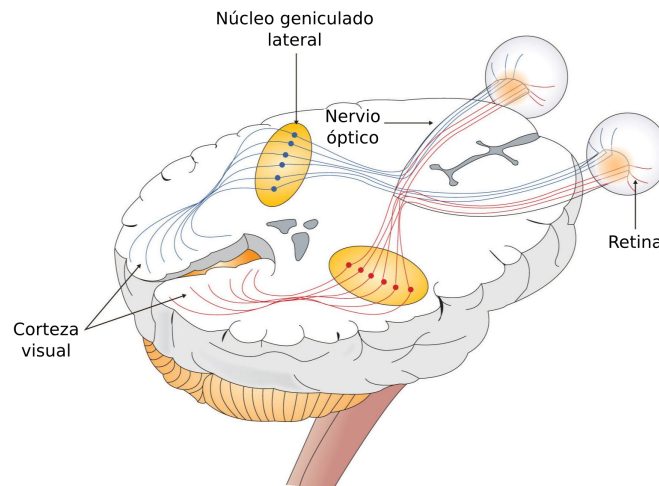


Figura 1.2: Recorrido neural del sistema visual. La luz llega primero a la retina a través de la pupila, entrada del ojo. La salida de la retina es el nervio óptico que luego del quiasma óptico llega al núcleo geniculado lateral en el tálamo. Las proyecciones o radiaciones ópticas del núcleo geniculado lateral llegan finalmente a la corteza visual primaria. La imagen fue tomada de <http://open.lib.umn.edu/intropsych/chapter/4-2-seeing/> y traducida al castellano.

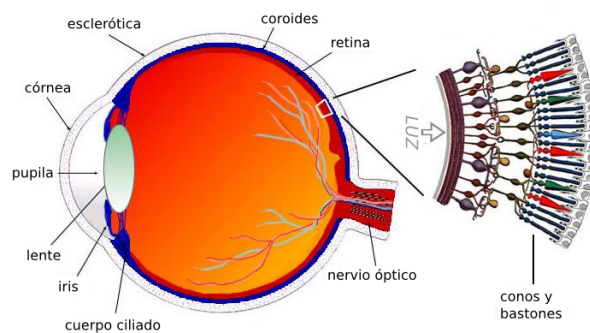


Figura 1.3: Representación del corte sagital de un ojo humano a la izquierda. Esquema de las capas celulares de la retina a la derecha. La imagen fue extraída de <http://www.blueconemonochromacy.org/how-the-eye-functions/> y luego traducida al castellano.

sobre la primera capa compuesta por fotorreceptores de dos tipos: conos y bastones, quienes absorben los fotones de la luz incidente y traducen la información recibida en señales eléctricas que llegan a la segunda capa compuesta por células bipolares. La última capa está compuesta por células ganglionares cuyos campos receptivos presentan oponencia de color, y sus axones forman el nervio óptico que lleva la información al resto del cerebro [4]. Los conos son los fotorreceptores que se activan cuando la luz es lo suficientemente intensa como la luz diurna. Los bastones son sensibles a cambios de brillo, se activan cuando la luz es tenue y se saturan cuando la luz es intensa. Se llama *visión fotópica* a la percepción visual con niveles de iluminación diurnos, régimen en el que se activan los conos. En este régimen la pupila tiene un diámetro igual o menor a 3 mm, y el nivel de luminancia está entre 10 y 108 cd/m^2 [5]. Por el contrario, cuando la iluminación es menor tiene lugar la *visión escotópica*, donde los conos no llegan

a activarse y entran en juego los bastones. En estas condiciones, la pupila supera el diámetro de 3 mm y el nivel de luminancia está entre 10^{-3} y 10^{-6} cd/m² [5].

En la figura 1.4 se pueden ver las curvas de absorción de los fotorreceptores humanos

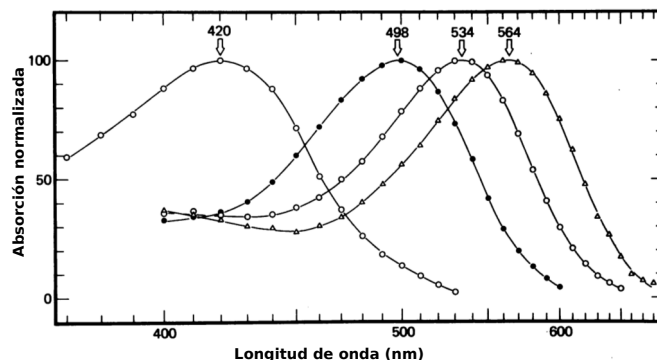


Figura 1.4: Curvas de sensibilidad espectral de los fotorreceptores humanos. Las curvas están marcadas como: “498”, el promedio de once bastones; “420”, el promedio de tres conos *S*; “534”, el promedio de once conos *M*; y “564”, el promedio de diecinueve conos *L* [4]. La figura fue extraída de la publicación: [6] y traducida al castellano.

medidas por Bowmaker en 1979 [6]. Estas curvas fueron medidas gracias a la donación de un paciente de 46 años que padecía un tumor intraocular en su ojo derecho que se trataba de un melanoma de la coroides (membrana de vasos sanguíneos y tejido conectivo que se encuentra entre la retina y la esclerótica). Le extrajeron ese ojo, y de él retiraron la retina para el estudio, de manera similar a como lo habían hecho con el ojo de un mono rhesus (*Macaca mulatta*) el año anterior. Podemos ver que las curvas de absorción de los fotorreceptores tienen un máximo en una determinada longitud de onda y luego decaen hacia los extremos del visible. En condiciones escotópicas sólo se activan los bastones. Por lo tanto, no es posible distinguir objetos en función del color, las discriminaciones sólo son posibles por diferencia de luminosidad en escala de grises. En estas condiciones, un fondo y una figura sólo pueden ser discriminados cuando los bastones sean excitados de manera diferencial. Por ejemplo, si el fondo tiene una distribución espectral de potencia plana, mientras que la reflectancia de la figura tiene una composición espectral acampanada con un máximo alrededor de 400 nm, entonces el observador podrá distinguirlos. En cambio, si el máximo está alrededor de los 500 nm, de forma que la probabilidad de absorción de fotones por el fondo y la figura sean similares, el observador no será capaz de discriminarlos.

Cuando la intensidad de luz es suficientemente intensa, entramos en el régimen fotópico, allí se saturan los bastones y se activan los conos. Existen tres tipos de conos en la retina, llamados conos *S*, *M* y *L*, ya que su sensibilidad alcanza las zonas de longitudes de onda cortas (*S* de “short”), medianas (*M* de “medium”), y largas (*L* de “long”). En la figura 1.4 podemos ver el alcance de las curvas de absorción de los tres conos humanos. Al tener más de un sensor en el régimen fotópico, podemos distinguir superficies que reflejan la luz con una composición espectral tal que excitan de manera

diferencial a los distintos sensores, y así ver en color. Con un único sensor podemos distinguir una figura del fondo cuando ambos excitan al sensor de manera diferencial. Si agregamos un segundo sensor que absorbe luz en un rango distinto del espectro, podremos distinguir matices entre la figura y el fondo que antes no eran perceptibles. Siempre que agreguemos sensores cuyo rango espectral esté corrido respecto de los anteriores, ampliaremos el rango de discriminaciones que podremos hacer.

Nosotras nos cuestionamos, en este trabajo, cuáles son las características de la percepción cromática que pueden ser explicadas a nivel de los conos de la retina. Desarrollamos un modelo que explica el proceso de absorción de fotones de una fuente de luz de un determinado color por parte de los conos que tiene en cuenta la fisiología del observador. Exploramos en qué medida este modelo de ruido puede reproducir experimentos comportamentales en materia de percepción de color.

1.4. Daltónicos y tetracrómatas

La mayoría de las personas tenemos conos de los tres tipos y nos llamamos *tricrómatas*. Sin embargo hay algunos sujetos *dicrómatas* que tienen conos de dos tipos, otros que tienen de un tipo y se llaman *monocrómatas*, y los que no tienen conos y se llaman *acrómatas*. Aproximadamente, el 92 % de la población es tricrómata, y por ser mayoría, las convenciones de color están establecidas de acuerdo a su experiencia visual. Alrededor de un 2 % es dicrómata, es decir tiene dos tipos de conos en lugar de tres, y dentro de este grupo existen todas las combinaciones posibles con su respectivo nombre. Hay aproximadamente un 1 % de *protanopes* que sólo poseen conos de tipo *S* y *M*, aproximadamente 1 % de *deuteranopes* con conos *S* y *L*, y menos de uno en mil *tritanopes* con conos *M* y *L*. Los nombres vienen del griego, “prot-” indica primero, “deuter-” segundo, y “trit-” tercero. Menos del 1 % de la población es monocrómata, y es una rareza encontrar sujetos acrómatas, ambos no distinguen colores [7]. Esta particularidad fue descubierta por John Dalton (1766-1844), químico británico quien notó que en algunas situaciones los colores que él percibía no coincidían con los reportados. Dalton explicó que cuando observaba la llama de la combustión de geranio rosado, no podía distinguir entre el rosa y el azul. A su vez coleccionó datos sobre otras 28 personas que exhibían esta anomalía y notó, además, que todos eran de sexo masculino. Escribió: “es notable que no he escuchado acerca de ninguna mujer con esta particularidad”. Dalton pensó que su tipo de daltonismo se debía a una coloración anormal en el humor acuoso del ojo; más aún, creía que algo azul coloreaba su humor vítreo. Al fallecer, examinaron los ojos de Dalton y concluyeron que su teoría no era cierta; sin embargo, le dieron su nombre a la particularidad en honor a su dedicado trabajo [3]. El *daltonismo* subraya la idea de que la percepción del color es subjetiva y que, por lo tanto, depende del observador.

En la mayoría de los casos, el daltonismo se hereda genéticamente, y sólo en algunos pocos casos se adquiere después de algún traumatismo. Las proteínas presentes en los conos que se encargan de absorber luz de determinadas frecuencias llevan el nombre de *opsinas*. Los genes que codifican la opsina presente en los conos M y L están ligados al cromosoma sexual X [8]. Mientras que el gen que codifica la opsina presente en los conos S está en el cromosoma 7 [8]. Si la cadena transcripcional está modificada, el sujeto no puede codificar esa proteína y será, por lo tanto, daltónico. Como dos tipos de dicromatismos están ligados al cromosoma sexual, prevalece más en los varones que en las mujeres. Nosotras tenemos dos copias de este cromosoma, y por lo tanto, si uno de los dos falla, el otro puede codificar correctamente la proteína. Para ser daltónicas necesitamos tener fallas en la genética de ambos cromosomas X . Sin embargo, podemos ser portadoras de daltonismo, y transmitirlo a nuestros hijos varones. Las personas daltónicas no sólo perciben los colores de manera diferente, sino que además perciben un espacio de color reducido. Los protanopes tienen dificultades para distinguir entre azules y verdes, así como también entre rojos y verdes. Por la carencia de conos L , su rango del espectro visible llega hasta 650 nm y no pueden ver los rojos puros, ni distinguir los púrpuras de los azules. En el caso de la deuteranopia donde los conos M están ausentes, perciben los colores en una forma bastante similar a los protanopes, ya que las curvas de absorción de los conos M y L comparten una gran parte del visible. Para los tritanopes los azules parecen verdosos, los amarillos y los naranjas parecen rosados, y los púrpuras parecen rojos.

Como las personas dicrómatas tienen dos tipos de conos en lugar de tres, se puede pensar que ven un espacio de color reducido en la variable que corresponde al tipo de cono que les falta. Mediante este argumento, se infirió que las curvas de sensibilidad espectral de los conos podían ser obtenidas a partir de experimentos perceptuales sobre personas dicrómatas de los tres tipos. A estas curvas se las llamó *quantal cone fundamentals* o *cone fundamentals* y las mostramos en la figura 1.5 [9]. Estas curvas tienen similitudes y diferencias con las medidas por Bowmaker sobre los conos (ver 1.4). Los dos conjuntos de curvas tienen forma de campana, los máximos se encuentran aproximadamente en las mismas longitudes de onda, y los anchos también son similares. Por otro lado, las cone fundamentals se anulan en los extremos del visible, mientras que las curvas de absorción de Bowmaker no lo hacen. Esto se debe a limitaciones experimentales, ya que la medición es confiable cerca del máximo. Por esta razón, a lo largo de nuestro trabajo elegimos utilizar las cone fundamentals como las curvas de sensibilidad espectral de los conos humanos.

También existe otro tipo de daltonismo llamado *tricrómata anómalo* en el que la persona tiene tres tipos de conos, pero uno de ellos tiene un pigmento alterado. Aquellos que son *protanómalos* se diferencian de los protanopes en que tienen conos L pero no les funcionan correctamente, y por lo tanto discriminan pobremente entre el verde y el rojo.

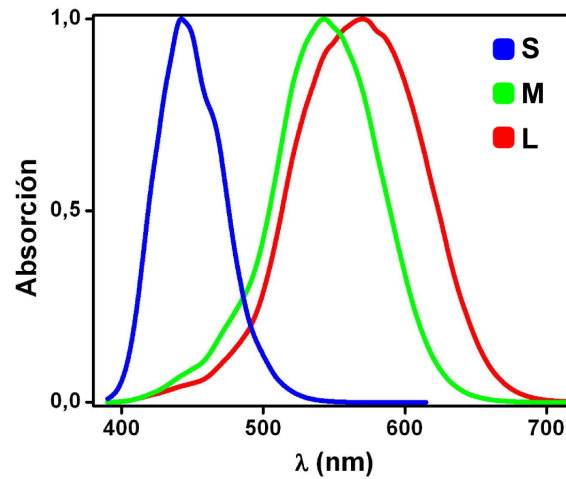


Figura 1.5: Curvas cone fundamentales. En azul para los conos S , en verde para los M , y en rojo para los L . Los datos fueron tomados de [9]

Aproximadamente el 1 % de la población es protanómala y está ligado al cromosoma sexual. Los *deuteranómalos* tienen una variación en los conos M , también ligada al cromosoma sexual, y representan la mayoría de los daltónicos (5 % de la población total). Por último, los *tritanómalos* heredan conos S (vía cromosoma 7) que, si bien están presentes, funcionan de manera tal que los que presentan esta anomalía tienen deficiencias a la hora de discriminar entre azules y verdes, o entre amarillos y rojos [7]. Se sabe que existe al menos una mujer que posee cuatro tipos de conos, lo que la convierte en *tetracrómata* con la posibilidad de distinguir una variedad de colores más amplia que el resto de la población. Se desconoce la prevalencia de los tetracrómatas, pero se estima que es baja, ya que hay un único reporte cuidadosamente documentado [10]. Se estima que la curva extra de absorción del cono extra tiene un máximo que se sitúa entre los máximos de las curvas M y L , y por lo tanto puede distinguir colores que los tricrómatas percibimos como iguales.

Si bien nuestro trabajo está centrado en predecir resultados experimentales medidos en personas tricrómatas por ser mayoría, también nos interesa entender cómo perciben el espacio de color aquellas personas que no lo son. Gracias a que el análisis teórico que derivamos lo permite, hacemos predicciones de algunos esquemas experimentales, tanto para retinas con dos tipos de conos como para retinas con cuatro tipos, en lugar de tres.

1.5. Metamerismo

Ligado a la subjetividad en la percepción del color existe un fenómeno que lleva el nombre de *metamerismo* en el que dos superficies de color se ven iguales a pesar de tener distinta composición espectral [11]. Este fenómeno puede deberse a condiciones

particulares de iluminación o de contexto. En este marco, cabe destacar que las personas daltónicas ven como iguales pares de superficies que habitualmente las personas tricrómatas vemos diferentes. Así como la mujer tetracromata puede hacer distinciones entre dos superficies que para el resto de la población son metaméricas entre sí.

A lo largo del trabajo usamos el concepto de metamerismo en numerosas ocasiones, ya que sobre este fenómeno están basados algunos de los experimentos que explicamos de manera teórica.

1.6. Sensibilidad a la luminosidad

La iluminación juega un rol muy importante a la hora de juzgar las características de un determinado color, y las características de este pueden cambiar según cómo esté iluminado. Por ejemplo, existen luces blancas que son más cálidas, como las de tungsteno, y luces blancas que son más frías, como los tubos fluorescentes, y una superficie se ve con un color ligeramente distinto cuando está iluminada con una u otra lámpara. Así como se observó este fenómeno, también se observó que no somos igual de sensibles ante cambios en la intensidad de haces monocromáticos de distintas longitudes de onda. Y se observó, por ejemplo, que notamos con mayor facilidad cambios en la luminosidad de un verde puro que de un rojo puro. La Commission Internationale de l'Éclairage (CIE), que es el organismo internacional encargado de decidir acuerdos y convenciones acerca de la luz, el color, y espacios de color, comunicó en 1924 resultados de sensibilidad a la luminosidad donde los sujetos experimentales hacían comparaciones perceptuales de luminosidad entre haces de distintas longitudes de onda [11]. Existen distintas maneras de medir la sensibilidad al brillo, una de ellas es a través de una luz parpadeante o *flicker* en la que al observador se le presentan dos campos alternantes: uno de referencia (usualmente una luz blanca) y un campo cromático de intensidad variable. El observador es libre de cambiar la intensidad del campo cromático hasta que ambos campos dejan de alternarse y se ven como un color fijo, en ese valor se establece el umbral de sensibilidad a la luminosidad para ese color [12]. El resultado de la sensibilidad a la luminosidad para personas tricrómatas reportado por la CIE 1924 se puede ver en la figura 1.6 medido tanto en condiciones fotópicas como en condiciones escotópicas. Se puede observar que hacia los extremos del visible perdemos la sensibilidad a la luminosidad, y por lo tanto cambios en la intensidad de rojos y violetas profundos no llegan a ser notorios. Mientras que pequeñas modificaciones en la intensidad de un haz caracterizado por una longitud de onda intermedia resultan claramente distinguibles.

Más adelante veremos que la luminosidad es una propiedad de la luz que se aisló de aquellas que involucran puramente al color por considerar que no contiene aspectos cromáticos. Uno de nuestros interrogantes ronda alrededor de entender en qué medida

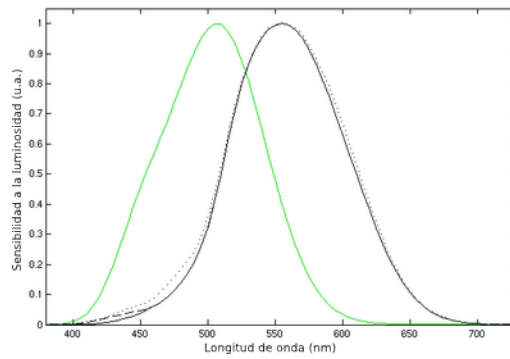


Figura 1.6: Curvas de luminosidad aparente. Sensibilidad a la luminosidad en condiciones escotópicas (línea verde) y fotópicas (líneas negras). Los datos de las líneas sólidas fueron tomados de [11], los de la línea a rayas fueron tomados de [13], y los de la línea de puntos de [14].

es correcto hacer esta separación, y por lo tanto, tratamos de explicar algunas de las características de las curvas de luminosidad aparente a través de nuestro modelo de ruido a nivel de fotorreceptores.

1.7. Funciones de color matching

Mucho antes de que se midieran las curvas de sensibilidad espectral de los conos, ya se sabía que cualquier color se puede obtener a partir de la suma de tres haces de luz llamados *colores primarios*. La idea de igualar un determinado color con la suma de colores primarios data del s. XIX y los experimentos realizados en esta dirección llevan el nombre de *color matching*. La CIE reportó en 1931 el resultado de un experimento de color matching realizado sobre 18 personas tricrómatas [11].

Durante ese experimento los sujetos debían llegar a una situación metamérica entre el color objetivo y el color ajustable. Ellos veían un campo visual iluminado con el color objetivo, en este caso un haz monocromático, y debían igualar ese color en el otro campo iluminado por la superposición de tres haces monocromáticos de intensidad ajustable por el sujeto. En esa situación se eligieron colores primarios rojo (R), verde (G), y azul (B) cuyas composiciones espectrales tenían picos en $R = 700$ nm, $G = 546,1$ nm, y $B = 435,8$ nm. Las intensidades de las luces primarias elegidas para cada estímulo de color se promediaron entre los 18 sujetos y se reportaron en función de la longitud de onda característica del estímulo en cuestión. En la figura 1.7 se puede ver el resultado reportado por la CIE. La curva de la luz roja lleva el nombre $r(\lambda)$, $g(\lambda)$ la verde, y $b(\lambda)$ la azul, por las iniciales de esos colores en inglés. Es notorio que la curva roja tiene intensidades negativas, y esto se debe a que, en ese rango de estímulos, el color objetivo no se puede igualar con la suma de los colores primarios elegidos, y por lo tanto se les permitió a los sujetos que sumaran la luz roja al color objetivo. Esta salvedad de adicionar rojo al color objetivo, se interpretó como una sustracción de intensidad de

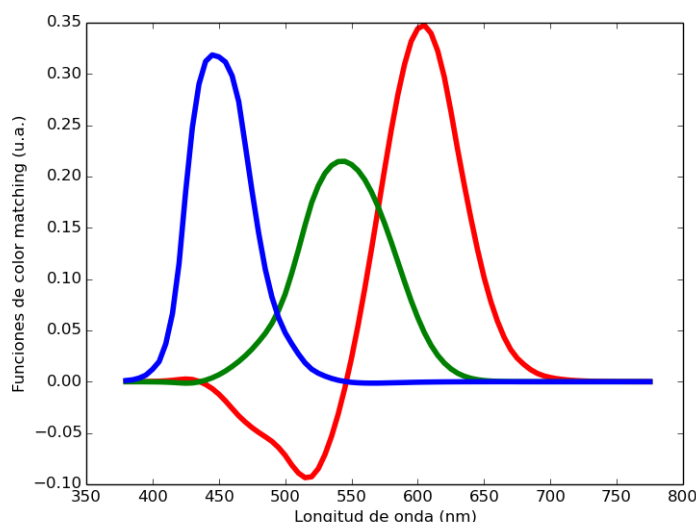


Figura 1.7: Funciones de color matching reportadas por la CIE 1931. En línea roja la función $r(\lambda)$, en verde $g(\lambda)$, y en azul $b(\lambda)$. Los colores primarios del experimento tenían picos en $R = 700$ nm, $G = 546,1$ nm, y $B = 435,8$ nm. Los datos fueron tomados de [15].

rojo en el color ajustable.

Una de las preguntas que tratamos de responder en este trabajo es hasta qué punto se pueden reproducir los resultados de este experimento con el modelo de la estadística de absorción de fotones por parte de los conos que vamos a introducir más adelante. En qué medida las funciones de color matching dependen de la terna de luces primarias elegidas para realizar el experimento. Y si es posible predecir el resultado del experimento de color matching con otra terna de luces.

1.8. Espacios de color

¿Cómo representar el color? Es una pregunta con múltiples respuestas. Si hablamos de colores que provienen de luces monocromáticas está bastante extendida la idea de representarlos según su longitud de onda o en frecuencia. Sin embargo, cuando el color está compuesto por una mezcla de longitudes de onda, el número de formas de representarlo crece rápidamente. Dentro del ámbito pictórico, alrededor de 1910, Munsell introdujo el espacio de color que se puede ver en la figura 1.8 de tres dimensiones: hue, saturación y brillo. El hue, palabra de difícil traducción, está representado por la coordenada angular, y con él se recorren los distintos matices del color. A su vez, estos colores pueden estar en una versión más o menos saturada, y esta dimensión está representada a través de la coordenada radial. Por último, en la coordenada vertical se puede modificar el brillo de esos colores.

El resultado del experimento de color matching fue un hito en la historia de los espacios del color porque fijó, de una manera rigurosa, la cantidad mínima de dimensiones

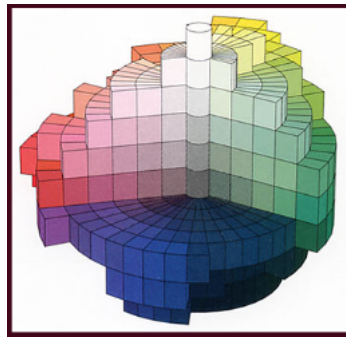


Figura 1.8: Representación del espacio de color introducido por Munsell. Imagen extraída de <http://dgmarin.blogspot.com.ar/2010/07/aristoteles-384-322.html>.

que un espacio perceptual de colores podía tener. Alcanza con tres ejes coordenados (R , G y B) para representar cualquier color. La curva de los estímulos monocromáticos dibuja una figura unidimensional en ese espacio donde los puntos tienen las coordenadas que resultan de evaluar las funciones de color matching en cada longitud de onda. El color negro está representado por el origen de coordenadas por ser el que genera una respuesta nula para los tres colores primarios. Un color con una composición espectral arbitraria ($I(\lambda)$) tiene coordenadas en ese espacio que resultan del producto escalar entre las funciones de color matching e $I(\lambda)$, y se encuentran, por lo tanto, en el seno del espacio.

Este espacio de color tiene, sin embargo, un inconveniente a la hora de ser interpretado, y es que algunos colores tienen coordenada R negativa, y por lo tanto esos colores generan un estímulo negativo en ese color primario. Entonces, la CIE decidió adoptar una transformación sobre las funciones de color matching a otra terna de funciones que representan todos los colores con coordenadas no-negativas. En el reporte de 1931 se comunicaron las nuevas coordenadas XYZ (ver figura 1.9) que resultan de una transformación lineal sobre las curvas de color matching. Tanto este conjunto de curvas como el de las funciones de color matching suelen llamarse *tristimulus values* y es por ello que nos referiremos a ellas tanto con ese nombre, como por coordenadas XYZ [11]. Cabe aclarar que estas curvas *no* se pueden obtener como resultado de un experimento de color matching con otras tres luces primarias. Como se puede ver, son positivas para todos los estímulos que sean haces monocromáticos, y por lo tanto para todos los colores observables, ya que cualquier color es una combinación de intensidades en distintas longitudes de onda dentro del espectro visible. Entonces, las coordenadas XYZ de un color con una composición espectral arbitraria ($I(\lambda)$) están caracterizadas por el producto escalar entre $I(\lambda)$ y estas tristimulus values.

Por otra parte, está bastante extendida la idea de que en realidad alcanzan dos dimensiones para representar el color, ya que en estas representaciones tridimensionales se conserva la propiedad lumínica del color, que se considera independiente de su hue. Como vimos antes, en 1924 la CIE presentó las curvas de sensibilidad a la luminosidad

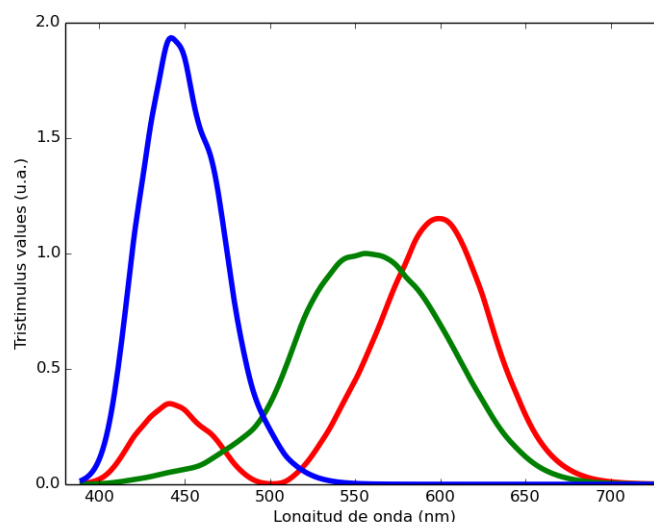


Figura 1.9: Tristimulus values reportados en la CIE 1931. En línea roja la curva $X(\lambda)$, en verde $Y(\lambda)$, y en azul $Z(\lambda)$. Los datos fueron tomados de [16].

(ver figura 1.6), y en la reunión de 1931 notaron que la curva $Y(\lambda)$ (ver curva verde de la figura 1.9) tiene una forma similar a la curva de sensibilidad a la luminosidad en condiciones fotópicas de iluminación. Motivados en esta semejanza, decidieron mantener constante la coordenada Y y así representar todos los colores que producen sensación de luminosidad constante. Por lo tanto, todos los colores estaban bien representados en un espacio bidimensional que lleva el nombre de *CIE xy 1931* y se puede ver en la figura 1.10. El conjunto de haces monocromáticos forma la frontera del espacio, ya que sus

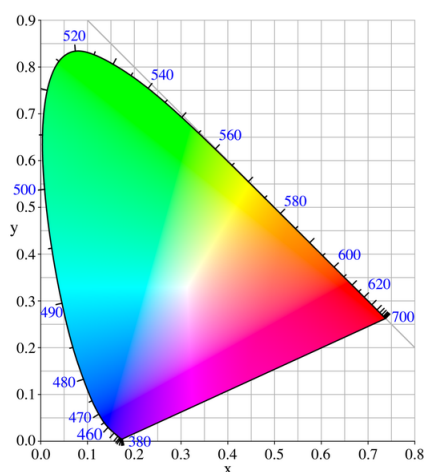


Figura 1.10: Representación del espacio de color CIE xy 1931. Imagen extraída de [17].

colores son los más saturados, es decir cualquier color que no sea un haz monocromático (o un púrpura) será la mezcla de al menos dos haces monocromáticos y, por lo tanto, estará representado por un punto dentro del espacio. El límite inferior está compuesto por los púrpuras que se consiguen con una combinación lineal de la primera longitud

de onda y la última del visible, es por ello que este límite tiene forma recta. En el centro del espacio se encuentra el color neutro, que según el valor de luminosidad Y , se tratará del blanco, del negro, o de un gris intermedio. Es razonable que este color se encuentre en el seno del espacio, ya que se puede conseguir con la suma de todos los haces monocromáticos. Uno de los resultados más importantes de nuestro trabajo consiste en poder predecir los resultados de discriminación cromática plasmados sobre este espacio de color.

Es fácil notar que las decisiones que se tomaron para construir el espacio de color CIE xy 1931 son de carácter heurístico y que a priori no hay nada que indique que este espacio es un buen espacio de color. De hecho, en las reuniones posteriores, la CIE introdujo otros espacios de color, cada uno con una ventaja respecto del anterior, producto de una transformación sobre el original. Con el fin de ilustrar algunos de ellos, en la figura 1.11 mostramos los espacios de color reportados en la CIE 1976. En el panel

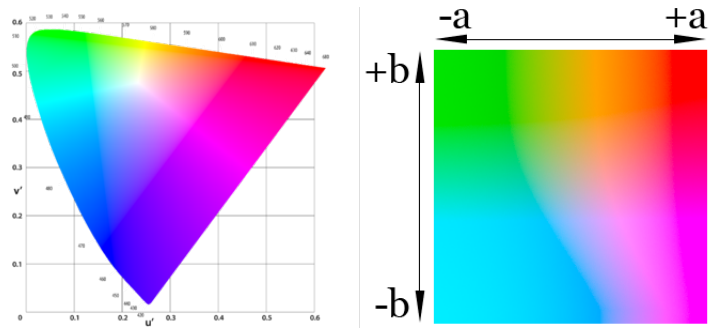


Figura 1.11: Representación de los espacios de color de la CIE. CIE Luv a la izquierda y CIE Lab a la derecha. Imágenes tomadas de <https://en.wikipedia.org>.

de la izquierda se puede ver el CIE Luv que pretende ser perceptualmente uniforme [18], aunque no lo es. Y en el panel de la derecha vemos el CIE Lab que intenta mostrar oponencia de color, es decir, enfrentar a aquellos colores que se consideran opuestos [18]. A través de nuestro modelo de la estadística de absorción de fotones por parte de los conos, nosotras deducimos cuál es el espacio perceptualmente uniforme que se deriva de la métrica que tiene en cuenta dicha estadística.

Más adelante, con el descubrimiento del carácter opoente de las células del núcleo geniculado lateral (ver figura 1.2) en el mono rhesus (*Macaca mulatta*), se formuló un espacio de color basado en esta característica neurobiológica [19]. El espacio se llamó *espacio DKL*, y tal como mostramos en la figura 1.12 la coordenada vertical representa la luminosidad y está expresada como la suma de la salida de los conos M y L . Una vez fijada la componente de luminosidad, en la dirección perpendicular, hallamos el plano de cromaticidad, cuyas coordenadas están correlacionadas con la oponencia verde-roja y azul-amarilla de la salida de los conos, es decir $L - M$ y $S - (L + M)$. En este trabajo, predecimos resultados perceptuales que están proyectados sobre este espacio de color.

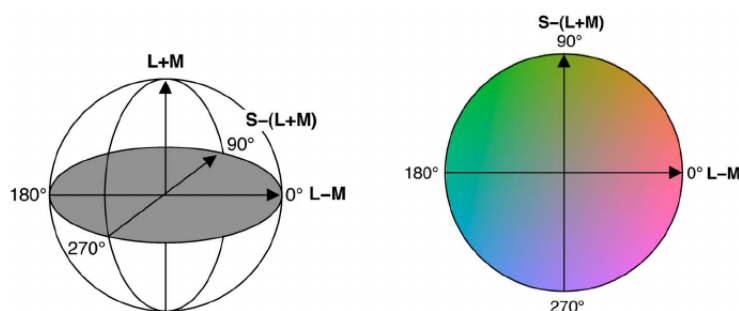


Figura 1.12: Representación del espacio de color DKL. Imagen extraída de [20].

1.9. Discriminación cromática

Los resultados de los experimentos en materia de percepción, memorización, categorización del color, vale decir, experimentos en los que se miden sensaciones subjetivas acerca del color, están proyectados sobre alguno de estos espacios. Las conclusiones de estos trabajos tienen, por lo tanto, una base en el espacio sobre el cual se están proyectando sus resultados. Y es fácil ver que la región que ocupa un determinado color, por ejemplo, el verde, es distinta en cada espacio, y que por lo tanto, un resultado que indica que memorizamos mejor los rojos que los verdes puede estar sesgado por el espacio sobre el que se eligió representar el color. Para entender los resultados plasmados sobre un determinado espacio de color, resulta de particular interés entonces, conocer la precisión con que discriminamos un color respecto de sus vecinos, ya que podría suceder que para ese espacio se le designe una región grande al verde y una pequeña al azul como es el caso del CIE xy 1931 (ver figura 1.10) y, sin embargo, no podamos hacer distinciones muy finas entre colores cercanos en la primera región y sí en la segunda. Para resolver este enigma se hicieron experimentos de discriminación cromática en los que se midió la mínima diferencia que se puede notar respecto de un color objetivo bajo distintos paradigmas y se plasmó en distintos espacios de color. Aquí sólo expondremos algunos de los resultados más citados.

Cuando el estímulo se trata de un haz de una longitud de onda pura, los resultados se suelen mostrar en la escala del metro patrón como se pueden ver en el panel A de la figura 1.13. Durante este experimento, el observador ve un campo bipartito donde una mitad está iluminada con el color objetivo, y al inicio, el otro campo está iluminado también con el color objetivo. El sujeto es libre de mover la luz del segundo campo a través de los estímulos hasta que reporta que nota una diferencia con el color objetivo. Se mueve primero en orden creciente en longitud de onda, y luego en orden decreciente, se realiza el promedio de esas diferencias ($\Delta\lambda$) y se reporta en función del estímulo presentado (λ). En el panel A de la figura 1.13 mostramos los resultados de los experimentos realizados por Wright y Pitt junto con los realizados por Smith y Pokorny. Cada curva refleja el resultado obtenido por un sujeto en particular, y en total

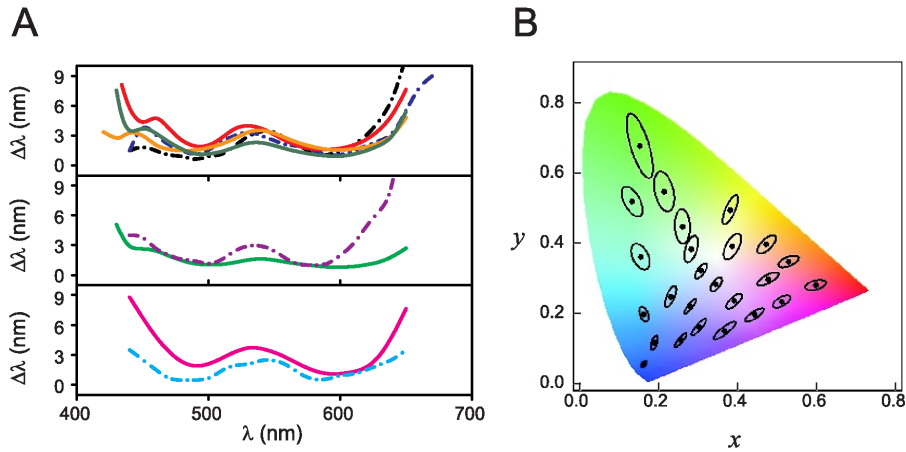


Figura 1.13: Error de discriminación cromática. A: Discriminación cromática $\Delta\lambda$ en función de la longitud de onda λ como estímulo para nueve sujetos diferentes. Todos los sujetos exhiben un máximo local alrededor de 550 nm y están separados en 3 grupos, dependiendo de la forma de la curva alrededor de 450 nm. Arriba: los sujetos que exhiben un máximo local. En el medio: los que exhiben un hombro. Abajo: los que presentan una curva monótonamente decreciente. Los datos fueron tomados de Wright y Pitt (1934) [21] y Pokorny y Smith (1970) [22]. B: Elipses de discriminación cromática en el espacio CIE 1931 xy medidas por MacAdam, aumentadas 10 veces su tamaño para mejorar la visualización, los datos fueron tomados de [23].

exhibimos los resultados de nueve sujetos. Se puede ver que en general, todos presentan una forma de *W*, es decir, hacia los extremos del visible discriminan peor, alrededor de 550 nm presentan un máximo local, y dos mínimos alrededor de 500 y 600 nm. A su vez, separamos los resultados en tres partes, entre aquellos que además presentan un máximo en la región de los azules, los que presentan un hombro, y los que tienen un comportamiento monótonamente decreciente en esa región, para poner más en evidencia la variabilidad entre distintos sujetos.

En 1942, MacAdam extendió los resultados de discriminación cromática midiendo colores objetivos que no son haces de longitudes de onda pura, sino que tienen composición espectral amplia. Elegió 25 colores objetivo, midió los umbrales de discriminación de un sujeto en particular, y proyectó los resultados sobre el espacio CIE xy 1931, como se puede ver en el panel B de la figura 1.13. Es notorio que, a través del espacio, el tamaño de las elipses de discriminación es variable. Podríamos pensar que discriminamos mejor en el azul que en el verde, pero como mencionamos anteriormente esta conclusión podría ser un artefacto de la representación elegida por el experimentador. Más adelante, en 1992, Krauskopf y Gegenfurtner midieron las elipses de discriminación cromática sobre el espacio DKL , que es aquel que representa la oponencia de color presente en el campo receptivo de las neuronas del núcleo geniculado lateral. En la figura 1.14 se pueden ver los resultados que obtuvieron al medir nueve colores objetivo en este espacio. Es particularmente notorio que las elipses de discriminación se encuentran orientadas con los ejes coordenados, lo que podría indicar que esta representación es la más apropiada para mostrar la habilidad que tenemos para distinguir un color de sus

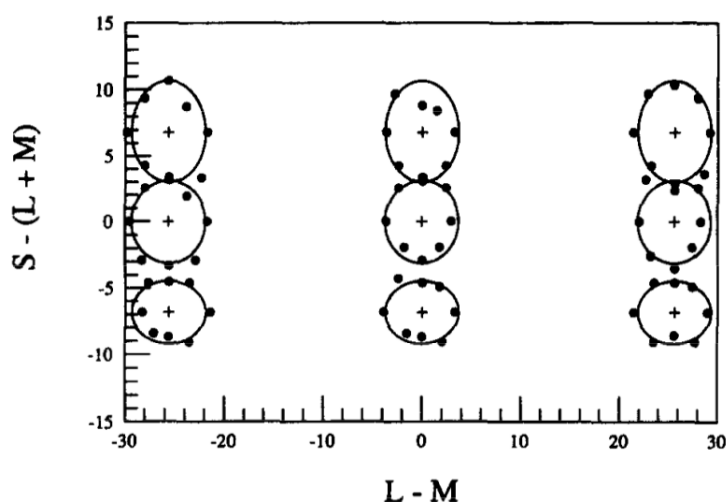


Figura 1.14: Error de discriminación cromática. Elipses de discriminación cromática en el espacio DKL medidas por Krauskopf y Gegenfurtner, aumentadas 3 veces su tamaño para mejorar la visualización. La imagen fue extraída de [24].

colores vecinos. Y, a su vez, podría dar indicios de que esa habilidad está codificada en canales independientes en términos de oponencia de color.

En este trabajo, nosotras nos cuestionamos principalmente acerca de cómo se mapean los estímulos de color en el cerebro, es decir de qué manera se representan, y en qué medida la discriminación está determinada por la primera etapa de procesamiento visual. Nuestro punto de partida fue desarrollar un modelo que explique la precisión con que las personas discriminamos un color de sus vecinos más cercanos.

Capítulo 2

Métodos

*“Vemos todos colores
sin saber lo que es hoy un color”*
— Edelmiro Molinari

2.1. Representaciones del color

El color es una sensación subjetiva que comienza cuando un haz de luz con un espectro $I(\lambda)$ llega al ojo. El conjunto de todos los espectros posibles tiene dimensión infinita, ya que dentro del continuo de longitudes de onda λ se puede variar la intensidad $I(\lambda)$ de manera arbitraria. Sin embargo, el sistema visual humano es insensible a la mayoría de esas dimensiones. En la segunda mitad del siglo XIX, los experimentos de color matching demostraron que, para la mayoría de los observadores, tres luces monocromáticas, mezcladas convenientemente, alcanzan para reproducir todos los colores visibles. Por lo tanto, el sistema visual humano proyecta todos los espectros posibles sobre un espacio de tres dimensiones (figura 2.1). Todos los espectros que comparten la misma proyección son metaméricos y, por lo tanto, se perciben como iguales.

Helmholtz y Young probaron que, ajustando la intensidad de tres luces monocromáticas de longitud de onda fija, los humanos tricrómatas podemos construir un haz de luz que percibimos visualmente igual a cualquier color objetivo. En particular, si el color objetivo es monocromático de longitud de onda λ , las tres intensidades requeridas definen las funciones de color matching $r(\lambda)$, $g(\lambda)$ y $b(\lambda)$ cuyas formas funcionales dependen de las longitudes de onda de las fuentes de las luces primarias utilizadas (ver figura 1.7). En ese entonces, el físico Hermann Grassmann (1853) introdujo una serie de leyes acerca del matcheo entre luces de color con diferente composición espectral [11], de las que se conocen diversas formulaciones, y sobre las que expodré una versión condensada:

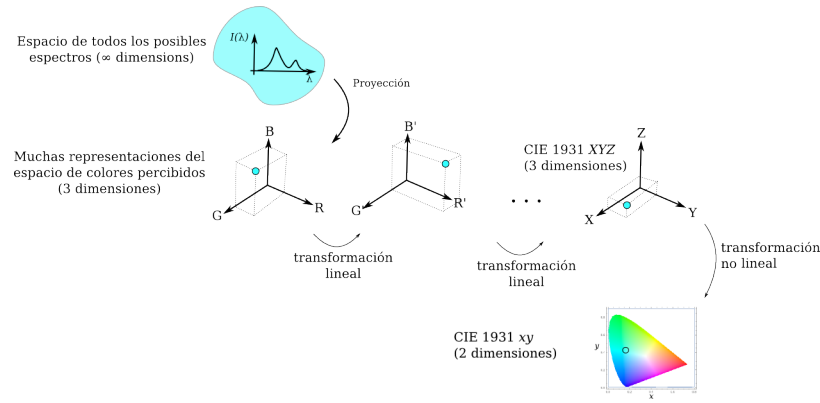


Figura 2.1: Transformaciones entre diferentes representaciones de la composición espectral de la luz. Arriba: La representación más completa es el espectro $I(\lambda)$, especificando la densidad de energía para cada longitud de onda. El espacio de todos los espectros posibles tiene dimensión infinita. En el medio: el sistema visual humano sólo puede percibir 3 dimensiones. La proyección del espacio de espectros al espacio de percepciones cromáticas es lineal. Existen muchas representaciones de 3 dimensiones percibidas por el ojo humano. Una de ellas es el espacio CIE XYZ (en el medio abajo). Cada espectro de la izquierda se proyecta a un único punto en el espacio tridimensional a través de una transformación no invertible. Abajo: El espacio cromático CIE xy 1931 surge de una transformación no lineal sobre el espacio CIE XYZ 1931 que elimina la dimensión de luminosidad, y sólo conserva variaciones de hue y saturación. Cada punto del espacio tridimensional se mapea a un punto en el espacio xy a través de esa transformación.

1. Ley de simetría: Si un estímulo de color A matchea con un estímulo de color B, entonces el estímulo de color B matchea con el estímulo de color A.
2. Ley de transitividad: Si A matchea con B, y B matchea con C, entonces A matchea con C.
3. Ley de proporcionalidad: Si A matchea con B, entonces ϵA matchea con ϵB , donde ϵ es una constante positiva.
4. Ley de aditividad: Si A, B, C, D son estímulos de color, y si A matchea con B, y C matchea con D, entonces $(A+C)$ matchea con $(B+D)$.

La linealidad de las operaciones de matcheo implica que la apariencia visual de un haz de luz con una composición espectral arbitraria $I(\lambda)$ se puede describir con tres números, definidos por el producto escalar entre las funciones de color matching y el espectro $I(\lambda)$ como a continuación,

$$\begin{aligned}
 R &= \int I(\lambda)r(\lambda) d\lambda = \langle I(\lambda), r(\lambda) \rangle, \\
 G &= \int I(\lambda)g(\lambda) d\lambda = \langle I(\lambda), g(\lambda) \rangle, \\
 B &= \int I(\lambda)b(\lambda) d\lambda = \langle I(\lambda), b(\lambda) \rangle.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Si las longitudes de onda de las tres fuentes de luz fueran variables, la forma de las funciones de color matching cambiaría. Por lo tanto, no hay nada fundamental

acerca de estas funciones, y en realidad podría haber tantas representaciones (R, G, B) diferentes como se prefiera. Desde un punto de vista teórico, cualquier transformación lineal invertible de un conjunto de coordenadas (R, G, B) da lugar a un nuevo conjunto de coordenadas (R', G', B') equivalente, representado en la figura 2.1 como el sistema de coordenadas de la columna del medio. El nuevo sistema de coordenadas se puede obtener también a partir de las integrales como en la expresión 2.1, pero con las nuevas funciones $r'(\lambda), g'(\lambda), b'(\lambda)$, derivadas a partir de una transformación lineal sobre las viejas funciones. El sistema de coordenadas original (R, G, B) tiene una particularidad de difícil interpretación, y es que algunos colores presentan coordenada R negativa. En 1931, la CIE seleccionó un conjunto particular de coordenadas (X, Y, Z) , también llamadas tristimulus values, producto de una transformación lineal sobre las (R, G, B) (ver figura 1.9) [11, 18]. Este conjunto de coordenadas no puede obtenerse a través de un experimento de color matching con luces primarias monocromáticas, y suele interpretarse como el resultado de un experimento con tres luces virtuales en el que las curvas tienen la ventaja de ser siempre no negativas. Cualquier haz de luz con una composición espectral arbitraria $I(\lambda)$ se representa con un punto en este espacio tridimensional que resulta del producto escalar entre ese espectro y las tristimulus values, es decir,

$$\begin{aligned} X &= \langle I(\lambda), X(\lambda) \rangle, \\ Y &= \langle I(\lambda), Y(\lambda) \rangle, \\ Z &= \langle I(\lambda), Z(\lambda) \rangle. \end{aligned}$$

Cuando dos vectores (X_1, Y_1, Z_1) y (X_2, Y_2, Z_2) sólo difieren en su longitud (son proporcionales el uno al otro), desde el punto de vista perceptual, son distinguibles únicamente en la variable de luminosidad, y no por su saturación, ni su hue. En algunas aplicaciones, es razonable descartar la componente de luminosidad, y conservar únicamente las dos restantes. En la reunión de la CIE de 1931 también se estableció la convención de llevar a cabo esta reducción, transformando el sistema de coordenadas (X, Y, Z) en un nuevo conjunto de coordenadas (x, y, Y) [11, 18] definidas como

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{X + Y + Z}, \\ y &= \frac{Y}{X + Y + Z}, \\ Y &= Y. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Las componentes x e y no varían si X, Y y Z se multiplican todas por el mismo factor, entonces x e y no contienen la dimensión de luminosidad. La variable Y está asociada a la sensación de luminosidad ya que, para luces monocromáticas, la dependencia de Y

con la longitud de onda se parece a la curva de luminosidad aparente (ver figuras 1.9 y 1.6). Una vez establecida la constante de luminosidad Y , el espacio resultante es bidimensional con coordenadas (x, y) tal como se muestra en la figura 1.10. El color neutro (blanco, gris, o negro) se encuentra en el centro del espacio con coordenadas $(1/3, 1/3)$. Los colores provenientes de haces monocromáticos forman el límite externo del espacio, ya que los colores con ese hue se encuentran allí en su versión más saturada. El límite inferior está poblado por los púrpuras o magentas, que resultan de una combinación lineal entre el primer y el último haz monocromático del visible. Y aquellos colores de composición espectral mixta, es decir, que resultan de la suma de más de dos o más haces monocromáticos, se encuentran en el seno del espacio.

2.2. La geometría de Fisher

La probabilidad de que los conos de tipo S , M o L absorban K_S , K_M y K_L fotones depende de las propiedades del haz que impacta sobre la retina, que en esta sección lo representaremos con el vector de parámetros $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_d)$. En términos generales, si la distribución de probabilidad de una variable aleatoria x depende del parámetro $\vec{\theta}$, usualmente es útil definir una noción de distancia en el espacio $\vec{\theta}$ de manera tal que dos puntos vecinos $\vec{\theta}^a$ y $\vec{\theta}^b$ estén cerca o lejos, dependiendo del efecto de moverse desde $\vec{\theta}^a$ hasta $\vec{\theta}^b$ sobre la distribución de probabilidad $P(x|\vec{\theta})$. Puede que en ciertas regiones del espacio $\vec{\theta}$, un desplazamiento del parámetro en una determinada cantidad $d\vec{\theta}$ cambie radicalmente la distribución de probabilidad $P(x|\vec{\theta})$, mientras que en otras regiones, el mismo desplazamiento casi no tenga efecto. En estas circunstancias, tiene sentido definir distancias en el espacio $\vec{\theta}$ en términos de un tensor métrico que varíe de un lugar a otro: el mismo desplazamiento $d\vec{\theta}$ debe corresponderse a una distancia larga en el primer caso, y una chica en el segundo. La matriz de información de Fisher es el objeto matemático a través del cual distancias infinitesimales en el espacio de parámetros están heredadas del efecto sobre la distribución de probabilidad $P(x|\vec{\theta})$ [25].

En este trabajo, la variable aleatoria x está identificada con el vector

$$\vec{K} = (K_S, K_M, K_L)$$

cuyas componentes representan el número de fotones absorbidos por unidad de tiempo por los conos de tipo S , M o L , respectivamente. Estos números son la única información acerca del haz que llega a los conos que se transmite al cerebro. El parámetro $\vec{\theta}$ representa aquellas propiedades del haz de luz que afectan la distribución de probabilidad del vector \vec{K} . Si, en un experimento dado, usamos únicamente haces de luz de intensidad fija pero que varían en longitud de onda, el vector $\vec{\theta}$ se reduce a un escalar,

y es igual a la longitud de onda λ que caracteriza a la fuente de luz (o equivalentemente, a cualquier función invertible de la longitud de onda). No precisamos ninguna información adicional para caracterizar a $P(K_S, K_M, K_L | \text{espectro})$. Si el haz de luz tiene un espectro arbitrario $I(\lambda)$, más abajo demostramos que el parámetro $\vec{\theta}$ es un vector de tres componentes, donde cada componente representa la cantidad de energía cayendo en la región del espectro donde cada tipo de cono es sensible. Nuevamente, no precisamos más información para caracterizar $P(K_S, K_M, K_L | \text{espectro})$. En la sección 3 se puede ver el cálculo de la distribución de probabilidad $P(K_S, K_M, K_L | \vec{\theta})$ para estas dos situaciones.

En términos generales, si $\vec{\theta}$ es un parámetro de d dimensiones, la información de Fisher es un tensor métrico definido como [25]

$$J(\vec{\theta}) = \begin{pmatrix} J_{11}(\vec{\theta}) & \dots & J_{1d}(\vec{\theta}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{d1}(\vec{\theta}) & \dots & J_{dd}(\vec{\theta}) \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

con

$$J_{ij}(\vec{\theta}) = - \left\langle \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ln P(\vec{K} | \vec{\theta}) \right\rangle_{P(\vec{K} | \vec{\theta})}. \quad (2.4)$$

Una propiedad importante de este tensor métrico, específicamente relacionado con el concepto intuitivo de *información*, es la cota de Cramér-Rao. La cota relaciona la matriz de Fisher con la precisión con que la variable aleatoria x puede usarse para estimar el parámetro $\vec{\theta}$. Si la información de Fisher es grande, muestrear x puede proveer un buen estimador de $\vec{\theta}$, después de algún procedimiento de decodificación convenientemente elegido. Una información de Fisher escasa, en cambio, implica que $P(x | \vec{\theta})$ difícilmente varíe con $\vec{\theta}$ y por lo tanto, no podemos esperar hacer una buena estimación del valor de $\vec{\theta}$ muestreando x . Formalmente, esto significa que el error cuadrático medio de un estimador sin sesgo $\hat{\vec{\theta}}(x)$ del parámetro $\vec{\theta}$ está acotado inferiormente. Nosotras introducimos el error cuadrático medio como una matriz E de dimensión $d \times d$, con elementos

$$E_{ij}(\vec{\theta}) = \left\langle [\hat{\theta}_i(x) - \theta_i] [\hat{\theta}_j(x) - \theta_j] \right\rangle_{P(x | \vec{\theta})}.$$

La cota de Cramér-Rao establece que

$$E(\vec{\theta}) \cdot J(\vec{\theta}) \geq \mathbb{1}, \quad (2.5)$$

donde $\mathbb{1}$ es la matriz identidad, y la desigualdad se refiere a toda la matriz, y no a los componentes. En otras palabras, todos los autovalores de la matriz $E \cdot J$ deben ser mayores que la unidad. La cota de Cramér-Rao de la ecuación 2.5 se puede expresar también como $E \geq J^{-1}$. Por lo tanto, así como J está asociado a la noción de infor-

mación, J^{-1} está asociado a la noción del mínimo error cuadrático medio de cualquier estimación. Cuanto mayor sea la información, menor será el error, y viceversa. La cota expresada en la ecuación 2.5 sólo es válida para estimadores sin sesgo, en el caso de estimadores con sesgo se requiere una forma más compleja [26]. Sin embargo, en presencia de un fondo acromático (como en todos los experimentos presentados en este trabajo), el error de discriminación siempre se ha reportado con media cero, entonces nosotras trabajamos bajo la suposición de que el sistema nervioso puede implementar por lo menos un estimador sin sesgo. Más adelante, en la sección 4.1, demostramos que esta suposición es válida para el procedimiento que deducimos, y que por ende, la ecuación 2.5 se mantiene. Diferente es el caso donde el color objetivo y el color de testeo están presentados sobre un fondo cromático, allí los sujetos reportan una estimación sesgada del estímulo objetivo lejos del hue del fondo [24, 27]. En esos casos, se debe emplear una forma más compleja para la cota de Cramér-Rao.

Por otro lado, los tensores métricos nos permiten calcular productos escalares. En la figura 2.2(a) vemos como esos productos operan en el espacio $\vec{\theta}$. Los productos sólo

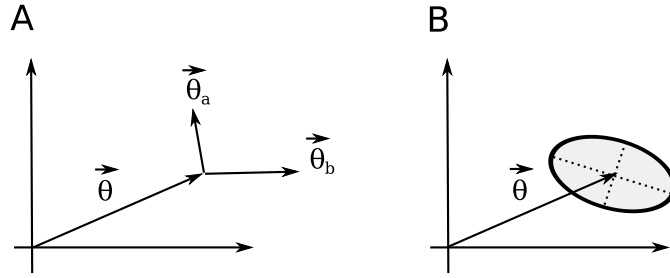


Figura 2.2: Productos escalares en el espacio de parámetros. A: El tensor de información de Fisher nos permite calcular productos escalares entre dos vectores $\vec{\theta}^a$ y $\vec{\theta}^b$ con un origen común de posición $\vec{\theta}$. B: El conjunto de todos los vectores de módulo constante alrededor de una posición $\vec{\theta}$ define una elipse, cuyos ejes principales están representados con líneas de puntos.

pueden calcularse entre pares de vectores $\vec{\theta}^a$ y $\vec{\theta}^b$ con un origen común de posición $\vec{\theta}$. El tensor de Fisher de la ecuación 2.3 define el producto escalar entre ellos como

$$\langle \vec{\theta}^a, \vec{\theta}^b \rangle = (\vec{\theta}^a)^T J(\vec{\theta}) \vec{\theta}^b, \quad (2.6)$$

donde el supraíndice T representa al vector transpuesto. La longitud del vector $\vec{\theta}^a$ originado en $\vec{\theta}$ es entonces

$$|\vec{\theta}^a| = \sqrt{\langle \vec{\theta}^a, \vec{\theta}^a \rangle} = \sqrt{(\vec{\theta}^a)^T J(\vec{\theta}) \vec{\theta}^a}. \quad (2.7)$$

La ecuación 2.7 implica que el conjunto de vectores a distancia constante de un determinado $\vec{\theta}$ en una cónica. Como la matriz de Fisher es siempre no negativa, la cónica es una elipse (un elipsoide, si la dimensión es mayor que 2), o en el caso límite, una cónica

parabólica. Ese conjunto de puntos está ilustrado en la figura 2.2 (b). Las direcciones de los ejes principales de la elipse son los autovectores de $J(\vec{\theta})$, que son también los autovectores de $[J(\vec{\theta})]^{-1}$. La longitud de los ejes son proporcionales a la inversa de la raíz cuadrada de los autovalores correspondientes de $J(\vec{\theta})$. Equivalentemente, las longitudes son proporcionales a la raíz cuadrada de los autovalores de $[J(\vec{\theta})]^{-1}$. Como J depende de $\vec{\theta}$, el tamaño, la excentricidad y la orientación de la elipse pueden variar punto a punto.

La ecuación 2.7 nos permite definir una distancia en el espacio de parámetros entre dos vectores $\vec{\theta}^a$ y $\vec{\theta}^b$, a lo largo de una curva $\vec{\theta}(t)$. Nosotras asumimos que t parametriza la curva, de manera tal que $\vec{\theta}(t=0) = \vec{\theta}^a$ y $\vec{\theta}(t=1) = \vec{\theta}^b$. Entonces,

$$\text{Dist}(\vec{\theta}^a, \vec{\theta}^b) = \int_{\text{curva}} |\mathrm{d}\vec{\theta}| = \int_0^1 \sqrt{\dot{\vec{\theta}}^T J(\vec{\theta}) \dot{\vec{\theta}}} dt,$$

donde $\dot{\vec{\theta}}$ representa la derivada (o vector velocidad) $\mathrm{d}\vec{\theta}/\mathrm{d}t$ a lo largo de la curva.

En la figura 2.2 (b), el espacio cromático CIE xy 1931 tiene coordenadas $(\theta_1, \theta_2) = (x, y)$. Cada elipse medida por MacAdam (ver figura 1.13 (b)) representa el conjunto de puntos en el espacio de color percibidos como la primera diferencia cromática detectable respecto al punto del centro. De manera equivalente, el espacio DKL tiene coordenadas $(\theta_1, \theta_2) = (L - M, S - (L + M))$, y las elipses medidas por Krauskopf y Gegenfurtner (figura 1.14) representan los umbrales de detección. La matriz de Fisher nos permite interpretar las elipses como los puntos a una distancia δ del centro, donde δ es el umbral de detección. En este trabajo, nosotras apuntamos a evaluar hasta qué punto las elipses medidas por MacAdam (o Krauskopf y Gegenfurtner) pueden ser derivadas de primeros principios, usando las propiedades de los fotorreceptores únicamente. Con el fin de calcular el tensor métrico de Fisher, necesitamos la probabilidad condicional $P(\vec{K}|\vec{\theta})$. En la próxima sección, derivamos esas probabilidades tanto para fuentes de luz monocromáticas, como para mezclas arbitrarias.

En la sección 2.1, recorrimos algunas representaciones de la composición de un haz de luz. Se puede, por ejemplo, representar el haz de luz con un espectro $I(\lambda)$, o con coordenadas específicas RGB , o con coordenadas CIE 1931 XYZ , o con las coordenadas reducidas xy , o con las coordenadas $L-M, S-(L+M)$. Nosotras definimos la función vectorial \vec{F} como la transformación entre dos de estas representaciones,

$$\vec{\theta}' = \vec{F}(\vec{\theta}). \quad (2.8)$$

Si la matriz de información de Fisher para una determinada representación $\vec{\theta}$ es conocida, es posible calcular la matriz de Fisher en otra representación $\vec{\theta}'$. La transformación debe ser tal que preserve los productos escalares, y por lo tanto, preserve la noción de

distancia, y el umbral de detección. Si $\vec{\theta}^a$ y $\vec{\theta}^b$ son dos desplazamientos infinitesimales del vector $\vec{\theta}$, nosotras definimos los desplazamientos infinitesimales transformados $\vec{\theta}'^a$ y $\vec{\theta}'^b$ a partir de una expansión a primer orden de \vec{F} ,

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{\theta} + \vec{\theta}^a) &\approx \vec{F}(\vec{\theta}) + [(\vec{\theta}^a)^T \vec{\nabla}] \vec{F}(\vec{\theta}) \equiv \vec{\theta}' + \vec{\theta}'^a \\ \vec{F}(\vec{\theta} + \vec{\theta}^b) &\approx \vec{F}(\vec{\theta}) + [(\vec{\theta}^b)^T \vec{\nabla}] \vec{F}(\vec{\theta}) \equiv \vec{\theta}' + \vec{\theta}'^b\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\vec{\theta}'^a &= [(\vec{\theta}^a)^T \vec{\nabla}] \vec{F}(\vec{\theta}) \\ \vec{\theta}'^b &= [(\vec{\theta}^b)^T \vec{\nabla}] \vec{F}(\vec{\theta}).\end{aligned}$$

Preservar el producto escalar significa que

$$(\vec{\theta}^a)^T J(\vec{\theta}) \vec{\theta}^b = (\vec{\theta}'^a)^T J'(\vec{\theta}') \vec{\theta}'^b.$$

Como los desplazamientos $\vec{\theta}^a$ y $\vec{\theta}^b$ son arbitrarios, esta ecuación significa que

$$J(\vec{\theta}) = C^T J'(\vec{\theta}') C, \quad (2.9)$$

con C igual a la matriz jacobiana

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \theta_d} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_d}{\partial \theta_1} & \cdots & \frac{\partial F_d}{\partial \theta_d} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

En general, la matriz C depende del parámetro $\vec{\theta}$. Sólo si \vec{F} es una transformación lineal, C se reduce a una matriz constante. Las fórmulas de transformación derivadas aquí en el contexto de la información de Fisher coinciden con las derivadas por Pant y Farup (2011) [28] o Vorobyev y Osorio (1998) [29] desde una perspectiva puramente geométrica.

Una vez derivado el formalismo que nos permite transformar la métrica de un espacio de parámetros a otro, necesitamos establecer cuál será el espacio cromático que servirá como punto de partida. Inspiradas en el hecho de explicar la estadística que tiene lugar en el fenómeno de absorción de fotones por parte de los fotorreceptores en la retina, elegimos el sistema de *coordenadas naturales* basadas en las probabilidades de absorción de los conos. Para poder trabajar analíticamente con las curvas de absorción, realizamos un ajuste sobre las mismas como lo muestra la figura 2.3. Además de tener en cuenta la probabilidad de absorción, estas coordenadas contemplan las diferentes

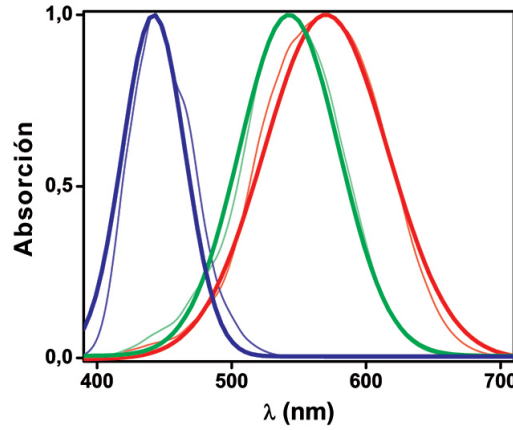


Figura 2.3: Quantal cone fundamentals de los conos S (azul), M (verde) y L (rojo), y su aproximación analítica. Líneas delgadas: datos experimentales de Stockman y Brainard (2009) [9]. Líneas gruesas: resultados del ajuste con la ecuación $h_i(\lambda) = \exp[-(\lambda - \lambda_i)^2 / \sigma_i^2]$ con $\lambda_S = 442,1$ nm, $\lambda_M = 542,8$ nm, $\lambda_L = 568,2$ nm, $\sigma_S = 32,96$ nm, $\sigma_M = 52,8$ nm, and $\sigma_L = 64,76$ nm.

proporciones de cada tipo de cono presente en la retina del observador. Si llamamos $h_S(\lambda)$, $h_M(\lambda)$, $h_L(\lambda)$ a la versión analítica de las funciones cone fundamentals mostradas en la figura 2.3, definimos las probabilidades de absorción ponderadas como

$$\begin{aligned} q_S(\lambda) &= \beta_S h_S(\lambda), \\ q_M(\lambda) &= \beta_M h_M(\lambda), \\ q_L(\lambda) &= \beta_L h_L(\lambda), \end{aligned} \quad (2.11)$$

donde β_i es la proporción de cada tipo de cono presente en la retina del observador, y como tales cumplen que $\beta_S + \beta_M + \beta_L = 1$. Por lo tanto, dado un haz de luz incidente con un espectro arbitrario $I(\lambda)$, las coordenadas naturales α_S , α_M , α_L resultan del producto escalar entre este espectro y las cone fundamentals ponderadas, es decir,

$$\begin{aligned} \alpha_S &= \int I(\lambda) q_S(\lambda) d\lambda = \langle I(\lambda), q_S(\lambda) \rangle, \\ \alpha_M &= \int I(\lambda) q_M(\lambda) d\lambda = \langle I(\lambda), q_M(\lambda) \rangle, \\ \alpha_L &= \int I(\lambda) q_L(\lambda) d\lambda = \langle I(\lambda), q_L(\lambda) \rangle. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Este sistema de coordenadas se diferencia de los mostrados anteriormente (ver sección 2.1) principalmente en que sus coordenadas son siempre no negativas, y a la vez no tiene un origen en una transformación de otro sistema de coordenadas resultado de un experimento perceptual. Más aún, las coordenadas α_S , α_M , α_L dan cuenta de las características fisiológicas de los conos presentes en la retina del observador.

A lo largo del trabajo haremos comparaciones entre nuestras predicciones teóricas y resultados de experimentos de discriminación cromática en dos de los espacios cromáticos antes mencionados: el CIE xy 1931 y el espacio DKL . Y por lo tanto, necesitamos introducir las transformaciones de coordenadas desde el sistema de coordenadas naturales $\vec{\alpha}$ a las coordenadas xy y $L - M, S - (L + M)$.

2.2.1. Transformación al espacio CIE xy 1931

Para comparar nuestros resultados teóricos con los medidos experimentalmente y luego proyectados en el espacio cromático CIE xy 1931, calculamos la transformación de coordenadas en dos pasos. Primero, hacemos el cambio de coordenadas $(\alpha_S, \alpha_M, \alpha_L)$ a coordenadas (X, Y, Z) , y luego, de (X, Y, Z) a (x, y, Y) . Ambas transformaciones son invertibles. Cada una de estas dos transformaciones involucra una matriz C definida en la expresión 2.10. Si llamamos C_1 a la matriz de la primera transformación, y C_2 a la de la segunda, el resultado de concatenar las dos transformaciones deriva en una matriz $C = C_1 C_2$. Para calcular C_1 analizamos todo el camino para llegar a las tristimulus values (X, Y, Z) pasando por las coordenadas $(\alpha_S, \alpha_M, \alpha_L)$. Definimos una transformación lineal entre los dos conjuntos de coordenadas, y deducimos que

$$\begin{pmatrix} \alpha_S \\ \alpha_M \\ \alpha_L \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

con C_1 una matriz constante, es decir, sus coeficientes no dependen de las coordenadas cromáticas, que se obtiene a partir de una transformación lineal entre las cone fundamentals SML (ver figura 2.3) y las tristimulus values XYZ (ver figura 1.9). Las coordenadas $(\alpha_S, \alpha_M, \alpha_L)$ se relacionan con las cone fundamentals SML a través de la proporción de cada tipo de cono $\beta_S, \beta_M, \beta_L$, y por ende C_1 depende de esas cantidades como a continuación,

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0,038\beta_S & -0,043\beta_S & 0,48\beta_S \\ -0,39\beta_M & 1,17\beta_M & 0,049\beta_M \\ 0,34\beta_L & 0,69\beta_L & -0,076\beta_L \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Para calcular C_2 , invertimos la expresión 2.2 y llegamos a

$$\begin{aligned} X &= Y \frac{x}{y} \\ Y &= Y \\ Z &= Y \frac{1 - x - y}{y}. \end{aligned}$$

Haciendo uso de la ecuación 2.10, obtenemos que

$$C_2 = \begin{pmatrix} \frac{Y}{y} & -\frac{xY}{y^2} & \frac{x}{y} \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{Y}{y} & -\frac{Y(1-x)}{y^2} & \frac{1-x-y}{y} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Con la matriz resultante $C = C_1 C_2$, vamos a calcular el tensor de Fisher en el espacio xyY (ver sección 5), y luego nos enfocaremos en la submatriz correspondiente a las dos primeras componentes, es decir, a las coordenadas x, y .

2.2.2. Transformación al espacio DKL

Para comparar nuestra predicción del error al discriminar con los resultados de Krauskopf y Gegenfurtner [24] necesitamos transformar el espacio natural $\vec{\alpha}$ al espacio DKL (ver figura 1.12). Por comodidad, redefinimos a las coordenadas del espacio cromático DKL como

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= L - M, \\ \gamma_2 &= S - (L + M), \\ \gamma_3 &= L + M. \end{aligned} \quad (2.15)$$

A su vez, las coordenadas S, M y L se relacionan con las $\vec{\alpha}$ a través de

$$\begin{aligned} \alpha_S &= \beta_S S, \\ \alpha_M &= \beta_M M, \\ \alpha_L &= \beta_L L, \end{aligned}$$

donde β_S, β_M , y β_L son las proporciones de los conos S, M , y L , respectivamente. Por lo tanto, la relación entre las coordenadas $\vec{\alpha}$ y las coordenadas del espacio DKL es

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\alpha_L}{\beta_L} - \frac{\alpha_M}{\beta_M}, \\ \gamma_2 &= \frac{\alpha_S}{\beta_S} - \left(\frac{\alpha_M}{\beta_M} + \frac{\alpha_L}{\beta_L} \right), \\ \gamma_3 &= \frac{\alpha_M}{\beta_M} + \frac{\alpha_L}{\beta_L}. \end{aligned}$$

Y la transformación inversa es

$$\begin{aligned}\alpha_S &= \beta_S(\gamma_2 + \gamma_3), \\ \alpha_M &= \beta_M(\gamma_3 - \gamma_1)/2, \\ \alpha_L &= \beta_L(\gamma_3 + \gamma_1)/2.\end{aligned}$$

Con esta transformación inversa, obtenemos la matriz jacobiana

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \beta_S & \beta_S \\ -\beta_M/2 & 0 & \beta_M/2 \\ \beta_L/2 & 0 & \beta_M/2 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Con esta matriz jacobiana, vamos a calcular el tensor de Fisher en el subespacio DKL de luminosidad constante, es decir con $L + M = \gamma_3 = cte$.

Capítulo 3

El modelo

“We believed we’d catch the rainbow

Ride the wind to the sun

Sail away on ships of wonder”

— Ronnie J. Dio

En este capítulo presentamos un modelo de distancia en espacios de color derivado de primeros principios basado en la métrica de Fisher. Este modelo reproduce en gran medida experimentos perceptuales de discriminación de color. Los resultados experimentales están plasmados sobre diversos espacios de color muy diferentes entre sí. Por lo tanto, antes de empezar a describir el modelo, necesitamos identificar el espacio de color sobre el que está definida la métrica de Fisher. En la historia de la colorimetría, la métrica fue definida por primera vez en el espacio (R, G, B) , y luego fue transformada en otros espacios de color, como (X, Y, Z) o (x, y) [11, 18]. En un principio, no hay razones que indiquen que estos espacios son adecuados, aparte del hecho de que resultados experimentales se reportaron sobre ellos. En este trabajo partimos de un modelo de ruido, en el que los errores de discriminación surgen del hecho de que cuando un fotón cae en la retina, no podemos saber con certeza qué tipo de cono lo va a absorber. Este modelo de ruido produce una métrica de Fisher definida naturalmente sobre un espacio de color específico, denotado a continuación por las coordenadas $(\alpha_S, \alpha_M, \alpha_L)$. Estas coordenadas difieren de las coordenadas clásicas, tales como (R, G, B) o (X, Y, Z) , en que no sólo caracterizan el espectro de luz incidente, sino que además reflejan las propiedades de la retina del observador. Una vez que especificamos estas propiedades, podemos transformar la matriz de Fisher de un espacio a otro. Si el modelo de ruido cambia, es de esperar que el espacio natural de color cambie también. Por lo tanto, con el fin de escribir la métrica de Fisher, determinamos primero cuáles son las coordenadas que modulan la naturaleza de la probabilidad en el proceso de absorción.

3.1. Estadística de la lluvia de fotones

Cuando un fotón de longitud de onda λ incide sobre la retina en condiciones fotópicas de iluminación, hay cuatro salidas posibles: el fotón puede ser detectado por un cono de tipo S , M o L , o puede pasar sin ser detectado. La probabilidad de cada una de esas salidas depende de la fracción de conos S , M y L que tiene la retina del observador, y de la capacidad de cada tipo de cono de absorber un fotón de esa longitud de onda λ , también llamada sensibilidad espectral para cada tipo de cono. Una vez que conocemos estos parámetros, desde el punto de vista estadístico, iluminar una retina con K fotones de longitud de onda λ es equivalente a distribuir aleatoriamente K pelotas en 4 cajas cuyas secciones eficaces dependen de la longitud de onda λ . Un número K_i de fotones caen en la caja i , donde i puede ser L para los conos L , M (conos M), S (conos S) o 0 (no son absorbidos por los conos). En esta sección, derivamos la distribución de probabilidad $P(\vec{K}) = P(K_S, K_M, K_L)$, bajo distintas condiciones. Primero analizamos el caso de una fuente de luz monocromática y un número fijo de fotones K . Luego, consideramos que el número de fotones por unidad de tiempo fluctúa, dando lugar a una incerteza en el número total de fotones que inciden sobre la retina. Finalmente, extendemos este análisis a fuentes que no son monocromáticas [30].

3.1.1. Emisión de fotones de una fuente de luz monocromática y confiable

Cada fotón que incide sobre la retina, o bien cae en alguno de los conos (que son del tipo S , M o L), o bien pasa sin ser detectado por ellos (podría, por ejemplo, caer en un bastón o en el nervio óptico, etc). La probabilidad de cada uno de estos eventos es proporcional a sus correspondientes secciones eficaces. Si K fotones de longitud de onda λ caen en la retina, la probabilidad de que N_S de ellos caigan en los conos S , N_M en los conos M , N_L en los conos L , y N_0 no caigan en los conos es

$$P(\vec{N}|K) = K! \prod_{i \in \{S, M, L, 0\}} \frac{\beta_i^{N_i}}{N_i!}, \quad (3.1)$$

donde hemos definido al vector $\vec{N} = (N_S, N_M, N_L)$. Las variables N_S, N_M, N_L, N_0 no son todas independientes, por el hecho de que suman K . Por lo tanto, el número N_0 del cuarto factor de la distribución multinomial de la ecuación 3.1 es una notación simple para $N_0 = K - N_S - N_M - N_L$. Los parámetros β_i representan la sección eficaz normalizada asociada a cada tipo de cono. Específicamente, si A_0 es el área de la retina que no está cubierta por conos, entonces definimos

$$\begin{aligned}\beta_i &= \frac{W_i A_i}{A_0 + \sum_{j \in \{S, M, L\}} W_j A_j} \quad \text{para } i \in \{S, M, L\}, \\ \beta_0 &= \frac{A_0}{A_0 + \sum_{j \in \{S, M, L\}} W_j A_j}\end{aligned}\quad (3.2)$$

donde W_i es el número de fotorreceptores de tipo i , y A_i es el área de cada tipo de cono.

Si el fotón cae en un cono, este puede o no ser absorbido por él, y la probabilidad de estas dos posibilidades depende de la longitud de onda λ . Cuando N_i fotones alcanzan los conos de tipo i , la probabilidad de que K_i de ellos sean realmente absorbidos está dada por la distribución binomial con probabilidad de absorción $h_i(\lambda)$, donde $h_S(\lambda)$, $h_M(\lambda)$ y $h_L(\lambda)$ son las curvas de sensibilidad espectral de conos de tipo $i = S, M$ y L que mostramos en la figura 2.3.

Esto es,

$$P(K_i|N_i) = \frac{N_i!}{K_i!(N_i - K_i)!} h_i(\lambda)^{K_i} [1 - h_i(\lambda)]^{N_i - K_i}, \quad (3.3)$$

para $i \in \{S, M, L\}$.

Cuando estos dos procesos se superponen secuencialmente, el destino de cada fotón se decide a través del proceso representado en la figura 3.1.

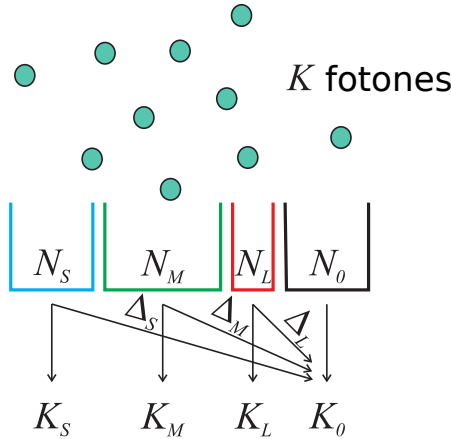


Figura 3.1: Esquema de la absorción de fotones. K fotones de longitud de onda λ caen en los conos S , M o L (representados por cajas coloreadas), o no caen en ellos (caja negra). Cada uno de los N_i fotones que caen en los conos de tipo i puede ser absorbido (y convertirse en uno de los K_i fotones absorbidos por el fotorreceptor de tipo i), o pasar sin ser absorbido (y convertirse en uno de los fotones Δ_i no absorbidos por un cono de tipo i). El número total de fotones absorbidos por un cono de tipo i es $K_i = N_i - \Delta_i$, y el número de fotones que permanecen sin ser absorbidos es $K_0 = N_0 + \Delta_S + \Delta_M + \Delta_L$. El proceso que transforma los K fotones que inciden en (N_S, N_M, N_L, N_0) está gobernado por la distribución multinomial de la ecuación 3.1, y el que transforma N_i en K_i , por la distribución binomial de la ecuación 3.3.

La probabilidad de que K_S, K_M, K_L fotones sean absorbidos por los conos S, M, L

y que K_0 pasen sin ser detectados es

$$P(\vec{K}|K, \lambda) = \sum_{\mathbf{N} > \mathbf{K}} P(\vec{N}|K, \lambda) \prod_{i \in \{S, M, L\}} P(K_i|N_i), \quad (3.4)$$

donde la suma corre sobre todos los vectores $\vec{N} = (N_S, N_M, N_L)$ que cumplen las condiciones

$$\begin{aligned} N_S &\geq K_S, \\ N_M &\geq K_M, \\ N_L &\geq K_L, \\ K &\geq N_S + N_M + N_L. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Y definimos las probabilidades de absorción ponderadas como

$$\begin{aligned} q_S(\lambda) &= \beta_S h_S(\lambda), \\ q_M(\lambda) &= \beta_M h_M(\lambda), \\ q_L(\lambda) &= \beta_L h_L(\lambda), \\ q_0(\lambda) &= 1 - q_S(\lambda) - q_M(\lambda) - q_L(\lambda). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Las condiciones enumeradas en la ecuación 3.5 implican que la suma de la ecuación 3.4 es

$$\sum_{\mathbf{N} > \mathbf{K}} f(\mathbf{N}) = \sum_{N_S=K_S}^{K_S+K_0} \sum_{N_M=K_M}^{K_M+K_S+K_0-N_S} \sum_{N_L=K_L}^{K-N_S-N_M} f(\mathbf{N}).$$

De aquí en adelante, para simplificar la notación, sacamos la dependencia explícita de λ de las probabilidades de absorción $h_i(\lambda)$. Reemplazamos las ecuaciones 3.1 y 3.3 en la ecuación 3.4, y definimos las variables (ver figura 3.1)

$$\begin{aligned} \Delta_S &= N_S - K_S, \\ \Delta_M &= N_M - K_M, \\ \Delta_L &= N_L - K_L. \end{aligned}$$

Y haciendo uso del teorema binomial

$$(a + b)^n = \sum_{j=0}^n \frac{n!}{j!(n-j)!} a^j b^{n-j},$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
P(\vec{K}|K, \lambda) &= \frac{K!(\beta_S h_S)^{K_S} (\beta_M h_M)^{K_M} (\beta_L h_L)^{K_L}}{K_S! K_M! K_L!} \sum_{\Delta_S=0}^{K_0} \frac{[\beta_S(1-h_S)]^{\Delta_S}}{\Delta_S!} \times \\
&\times \sum_{\Delta_M=0}^{K_0-\Delta_S} \frac{[\beta_M(1-h_M)]^{\Delta_M}}{\Delta_M!} \sum_{\Delta_L=0}^{K_0-\Delta_S-\Delta_M} \frac{[\beta_L(1-h_L)]^{\Delta_L}}{\Delta_L!} \frac{\beta_0^{N_0}}{N_0!} \\
&= \frac{K!(\beta_S h_S)^{K_S} (\beta_M h_M)^{K_M} (\beta_L h_L)^{K_L}}{K_S! K_M! K_L!} \sum_{\Delta_S=0}^{K_0} \frac{[\beta_S(1-h_S)]^{\Delta_S}}{\Delta_S!} \times \\
&\sum_{\Delta_M=0}^{K_0-\Delta_S} \frac{[\beta_M(1-h_M)]^{\Delta_M}}{\Delta_M!} \sum_{\Delta_L=0}^{K_0-\Delta_S-\Delta_M} \frac{[\beta_L(1-h_L)]^{\Delta_L}}{\Delta_L!} \frac{\beta_0^{K_0-\Delta_S-\Delta_M-\Delta_L}}{(K_0-\Delta_S-\Delta_M-\Delta_L)!} \\
&= \frac{K!(\beta_S h_S)^{K_S} (\beta_M h_M)^{K_M} (\beta_L h_L)^{K_L}}{K_S! K_M! K_L!} \sum_{\Delta_S=0}^{K_0} \frac{[\beta_S(1-h_S)]^{\Delta_S}}{\Delta_S!} \times \\
&\sum_{\Delta_M=0}^{K_0-\Delta_S} \frac{[\beta_M(1-h_M)]^{\Delta_M}}{\Delta_M!} \frac{[\beta_0 + \beta_L(1-h_L)]^{K_0-\Delta_S-\Delta_M}}{(K_0-\Delta_S-\Delta_M)!} \\
&= \frac{K!(\beta_S h_S)^{K_S} (\beta_M h_M)^{K_M} (\beta_L h_L)^{K_L}}{K_S! K_M! K_L!} \sum_{\Delta_S=0}^{K_0} \frac{[\beta_S(1-h_S)]^{\Delta_S}}{\Delta_S!} \\
&\frac{[\beta_0 + \beta_L(1-h_L) + \beta_M(1-h_M)]^{K_0-\Delta_S}}{(K_0-\Delta_S)!} \\
&= \frac{K!(\beta_S h_S)^{K_S} (\beta_M h_M)^{K_M} (\beta_L h_L)^{K_L}}{K_S! K_M! K_L!} \times \\
&\frac{[\beta_0 + \beta_L(1-h_L) + \beta_M(1-h_M) + \beta_S(1-h_S)]^{K_0}}{K_0!} \\
&= \frac{K!(\beta_S h_S)^{K_S} (\beta_M h_M)^{K_M} (\beta_L h_L)^{K_L}}{K_S! K_M! K_L!} \frac{(1 - \beta_S h_S - \beta_M h_M - \beta_L h_L)^{K_0}}{K_0!} \\
&= K! \prod_{i=\{0,S,M,L\}} \frac{q_i^{K_i}}{K_i!},
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad se hace uso de las definiciones de la ecuación 3.6.

Por lo tanto, deducimos que la ecuación 3.4 es igual a

$$P(\vec{K}|K, \lambda) = K! \prod_{i \in \{S,M,L,0\}} \frac{q_i(\lambda)^{K_i}}{K_i!}. \quad (3.7)$$

Como antes, K_0 es una notación simple para $K - K_S - K_M - K_L$. La ecuación 3.7 implica que la convolución del proceso multinomial de la ecuación 3.1 y el binomial de la ecuación 3.3 da lugar a otra distribución multinomial gobernada por las probabilidades de absorción ponderadas, es decir, por una combinación de los parámetros gobernados por los dos procesos en juego.

3.1.2. Emisión de fotones de una fuente de luz monocromática no confiable

Si el número total de fotones K de longitud de onda λ es una variable estocástica gobernada por una distribución poissoniana de media $I(\lambda)$

$$P[K|I(\lambda)] = e^{-I(\lambda)} \frac{I(\lambda)^K}{K!}, \quad (3.8)$$

entonces, la probabilidad de los fotones absorbidos es

$$P[\vec{K}|I(\lambda)] = \sum_{K=0}^{+\infty} P(\vec{K}|K, \lambda) P[K|I(\lambda)]. \quad (3.9)$$

Como todavía estamos analizando el caso monocromático, por simplicidad, sacamos la dependencia explícita de λ en $I(\lambda)$ y $q_i(\lambda)$, y los denotamos como I y q_i . Usando el hecho de que $K_0 = K - K_S - K_M - K_L$, y de que $q_0 = 1 - q_S - q_M - q_L$, y reemplazando las ecuaciones 3.7 y 3.8 en la ecuación 3.9 obtenemos que

$$\begin{aligned} P[\vec{K}|I] &= e^{-I} \frac{q_S^{K_S}}{K_S!} \frac{q_M^{K_M}}{K_M!} \frac{q_L^{K_L}}{K_L!} \\ &\quad \sum_{K=K_S+K_M+K_L}^{+\infty} \frac{q_0^{K-K_S-K_M-K_L} I^K}{(K - K_S - K_M - K_L)!} \\ &= e^{-I} \frac{(Iq_S)^{K_S}}{K_S!} \frac{(Iq_M)^{K_M}}{K_M!} \frac{(Iq_L)^{K_L}}{K_L!} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(Iq_0)^\ell}{\ell!} \\ &= e^{-I} \frac{(Iq_S)^{K_S}}{K_S!} \frac{(Iq_M)^{K_M}}{K_M!} \frac{(Iq_L)^{K_L}}{K_L!} e^{Iq_0} \\ &= \prod_{i \in \{S, M, L\}} \text{Poisson}(K_i | Iq_i). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P[\vec{K}|I(\lambda)] = \prod_{i \in \{S, M, L\}} \text{Poisson}[K_i | I(\lambda)q_i(\lambda)]. \quad (3.10)$$

En la ecuación 3.10, la distribución conjunta de K_S, K_M y K_L es el producto de los tres factores, y cada factor involucra una variable K_i diferente. Esto implica que las tres variables son independientes entre sí. Más aún, cada factor es una distribución poissoniana de media $I(\lambda)q_i(\lambda)$ y por ende, la absorción de un fotón por un fotorreceptor es independiente de la absorción de otro fotón por otro fotorreceptor, sea o no del mismo tipo. Este resultado es distinto al que obtuvimos en el caso de intensidad K fija, donde las variables K_i no eran independientes unas de las otras. Este tipo de análisis estadístico del proceso de absorción de fotones también fue estudiado por Zhaoping et al [31]. En ese trabajo, derivaron la ecuación 3.10 a través de hipótesis heurísti-

cas, mientras que en nuestro trabajo [30], nosotras deducimos la misma ecuación de primeros principios.

3.1.3. Emisión de fotones de una fuente de luz con un espectro arbitrario y no confiable

En las secciones previas, las fuentes de luz emitían fotones de una sola longitud de onda λ . En esta sección, asumimos que la fuente de luz emite fotones en un rango de longitudes de onda, con una intensidad diferente en cada una de ellas. Por simplicidad, vamos a trabajar con un conjunto discreto de longitudes de onda, pero que la generalización al continuo (que se dará más adelante) es inmediata. Esto significa que el promedio del número de fotones de longitud de onda λ_j es $I(\lambda_j)$, y j varía entre 1 y r . Con el fin de abreviar la notación, definimos el vector r -dimensional

$$\vec{I} = (I(\lambda_1), I(\lambda_2), \dots, I(\lambda_r)).$$

Existen muchas maneras en que los conos S pueden absorber K_S fotones. Una posibilidad es que todos los K_S fotones tengan longitud de onda λ_1 . Otra posibilidad es que la mitad de ellos tenga longitud de onda λ_1 , y la otra mitad, λ_2 . Así siguiendo, si cambiamos la fracción de fotones proveniente de cada longitud de onda, llegamos a un gran número de posibilidades. Llamamos G_S^j al número de fotones de longitud de onda λ_j absorbidos por los conos S . Y definimos los vectores r -dimensionales

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_S &= (G_S^1, \dots, G_S^r), \\ \mathbf{G}_M &= (G_M^1, \dots, G_M^r), \\ \mathbf{G}_L &= (G_L^1, \dots, G_L^r). \end{aligned}$$

Si los números totales de fotones absorbidos son K_S, K_M y K_L , las componentes de los tres vectores definidos arriba deben sumar hasta esos valores, es decir,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^r G_S^j &= K_S, \\ \sum_{j=1}^r G_M^j &= K_M, \\ \sum_{j=1}^r G_L^j &= K_L. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Llamamos $\mathcal{U}_S, \mathcal{U}_M$ y \mathcal{U}_L a los conjuntos de todos los vectores $\mathbf{G}_S, \mathbf{G}_M$ y \mathbf{G}_L cuyas componentes son enteros no negativos que completan la ecuación 3.11. Matemática-

mente,

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_S &= \{\mathbf{G}_S/G_S^j \geq 0 \ \forall j \ \& \ \sum_{j=1}^r G_S^j = K_S\}, \\ \mathcal{U}_M &= \{\mathbf{G}_M/G_M^j \geq 0 \ \forall j \ \& \ \sum_{j=1}^r G_M^j = K_M\}, \\ \mathcal{U}_L &= \{\mathbf{G}_L/G_L^j \geq 0 \ \forall j \ \& \ \sum_{j=1}^r G_L^j = K_L\}.\end{aligned}$$

A partir de estas definiciones, la probabilidad de absorción de K_S, K_M y K_L fotones por los conos S, M y L puede ser escrita en términos de la suma de todas las composiciones espectrales posibles, es decir,

$$\begin{aligned}P(\vec{K}|\vec{I}) &= \sum_{\mathbf{G}_S \in \mathcal{U}_S} \sum_{\mathbf{G}_M \in \mathcal{U}_M} \sum_{\mathbf{G}_L \in \mathcal{U}_L} \\ &\quad \prod_{j=1}^r P[G_S^j, G_M^j, G_L^j | I(\lambda_j)],\end{aligned}\tag{3.12}$$

donde la probabilidad $P[G_S^j, G_M^j, G_L^j | I(\lambda_j)]$ del lado derecho de la ecuación 3.12 es la misma que la de la ecuación 3.10, pero ahora está evaluada en un vector G (en lugar del vector K). Las sumas se deben a que, potencialmente, son muchas las combinaciones de longitudes de onda que contribuyen al mismo $\vec{K} = (K_S, K_M, K_L)$.

Consideramos todas esas posibilidades, y definimos los coeficientes $\vec{\alpha}$ que son las coordenadas naturales (ver sección 2.2)

$$\begin{aligned}\alpha_S &= \sum_{j=1}^r I(\lambda_j) q_S(\lambda_j), \\ \alpha_M &= \sum_{j=1}^r I(\lambda_j) q_M(\lambda_j), \\ \alpha_L &= \sum_{j=1}^r I(\lambda_j) q_L(\lambda_j).\end{aligned}\tag{3.13}$$

Reemplazamos la ecuación 3.10 en la ecuación 3.12,

$$\begin{aligned}
P(\vec{K}|\vec{I}) &= \prod_{\ell \in \{S, M, L\}} \sum_{\mathbf{G}_\ell \in \mathcal{U}_\ell} \prod_{j=1}^r e^{-I(\lambda_j)q_\ell(\lambda_j)} \frac{[I(\lambda_j)q_\ell(\lambda_j)]^{G_\ell^j}}{G_\ell^j!} \\
&= \prod_{\ell \in \{S, M, L\}} \frac{\prod_{i=1}^r e^{-I(\lambda_i)q_\ell(\lambda_i)}}{K_\ell!} K_\ell! \sum_{\mathbf{G}_\ell \in \mathcal{U}_\ell} \prod_{j=1}^r \frac{[I(\lambda_j)q_\ell(\lambda_j)]^{G_\ell^j}}{G_\ell^j!} \\
&= \prod_{\ell \in \{S, M, L\}} \frac{\exp[-\sum_{i=1}^r I(\lambda_i)q_\ell(\lambda_i)]}{K_\ell!} \left[\sum_{j=1}^r I(\lambda_j)q_\ell(\lambda_j) \right]^{K_\ell}. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

En la última igualdad hacemos uso del teorema multinomial

$$\left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^n = n! \sum_{j_1, \dots, j_k} \prod_{\ell=1}^k \frac{a_\ell^{j_\ell}}{j_\ell!},$$

donde la suma corre sobre todos los enteros $\{j_1, \dots, j_k\}$ que satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned}
0 &\leq j_\ell \leq n, \\
n &= j_1 + \dots + j_k.
\end{aligned} \quad (3.15)$$

Por lo tanto,

$$P(\vec{K}|\vec{I}) = \prod_{\ell \in \{S, M, L\}} \text{Poisson}(K_\ell | \alpha_\ell). \quad (3.16)$$

Esta ecuación es funcionalmente igual a la ecuación 3.10, pero en lugar de depender de los parámetros del haz monocromático $I(\lambda)q_\ell(\lambda)$, la probabilidad ahora depende de los productos escalares α_ℓ . Estos valores representan la probabilidad total de absorción de cada tipo de cono, teniendo en cuenta la dependencia en longitud de onda del espectro del haz incidente y de la composición de la retina (a través de los valores β_i). Si, en lugar de r valores discretos, el espectro incidente se trata de un continuo en longitud de onda, la derivación de esta sección es la misma, excepto por la definición de los valores α_i de la expresión 3.13 donde se debe cambiar la suma por integrales. Los demás aspectos no tienen cambios.

De todas las características del estímulo \vec{I} , nuestro sistema visual sólo puede aprovechar aquellas que quedan luego de pasar por el filtro de los fotorreceptores, descritas por este análisis a través de las coordenadas $\vec{\alpha}$ que resultan del producto escalar entre el estímulo \vec{I} y las curvas de absorción de los conos pesadas por su proporción en la retina (ver la expresión 3.13). Es decir, el espacio r -dimensional donde representamos inicialmente al estímulo se puede reducir efectivamente a un espacio de tres dimensiones donde, por ejemplo, recorrer el espectro de luces monocromáticas equivale a viajar por una curva dentro de él. Como las coordenadas $\vec{\alpha}$ son las coordenadas naturales

para la descripción de un estímulo en el marco de nuestro modelo, de ahora en más vamos a usar esta terna para caracterizar al color de la fuente de luz dada, y por lo tanto vamos a escribir a la ecuación 3.16 como

$$P(\vec{K}|\vec{\alpha}) = \prod_{\ell \in \{S, M, L\}} \text{Poisson}(K_\ell | \alpha_\ell). \quad (3.17)$$

Si la fuente de luz representa un haz monocromático, es decir, para $I(\lambda) = I_0 \delta(\lambda - \lambda_0)$, entonces, la ecuación 3.17 se reduce a la ecuación 3.10.

3.2. Conclusión

En este capítulo, caracterizamos uno de los procesos estocásticos que tienen lugar en la retina del observador cuando este visualiza un haz de luz con una composición arbitraria. Para la descripción de este proceso tuvimos en cuenta la absorción de fotones provenientes de la fuente de luz por parte de los fotorreceptores de la retina. Se trata de un proceso poissoniano donde la probabilidad de absorber un determinado número de fotones depende de las características del haz incidente, de las curvas de absorción de los conos, y de la proporción de cada tipo de cono presente en la retina del observador. Y, por lo tanto, explica la estadística de absorción de fotones a nivel de la primera etapa del procesamiento visual. En los capítulos sucesivos, todos los análisis relatados tienen su punto de partida en las distribuciones de probabilidad descriptas en esta sección.

Capítulo 4

Estimaciones del estímulo presentado

“- *Veo, veo.*
- *¿Qué ves?*
- *Una cosa.*
- *¿Qué cosa?*
- *Maravillosa.*
- *¿De qué color?*
- *Color, color...*”
— Saber popular

Tal como vimos en la sección 2.1, existen numerosos espacios donde representar el color. Los resultados de experimentos perceptuales suelen proyectarse en uno de los espacios mencionados anteriormente, y allí, la tarea testeada se expresa en función del estímulo presentado. Sin embargo, estas proyecciones podrían no ser adecuadas. Supongamos, por ejemplo, que queremos testear la habilidad de los sujetos para reproducir un color monocromático de su memoria. En ese caso, le presentaríamos un estímulo monocromático (λ_t) y minutos más tarde, el observador debería tratar de recordarlo y reproducirlo (λ_m). Los resultados posiblemente se mostrarían como el color recordado (λ_m) en escala métrica en función del estímulo presentado (λ_t). Sin embargo, podría suceder que la representación de ese estímulo en el cerebro tenga sesgos debido a los cálculos realizados en las distintas etapas del procesamiento visual. Y que entonces, cuando el sujeto realiza la tarea de reproducir un determinado color que extrae de su memoria, haga comparaciones con un color que está sesgado perceptualmente siempre en la misma dirección respecto del color proveniente del estímulo que le presentaron. Dado que, en gran medida, nosotras queremos comparar resultados medidos experimentalmente con las predicciones teóricas que se derivan de nuestro modelo, nos interesa

decodificar el mejor estimador del estímulo presentado en el marco de nuestra teoría.

4.1. Estimación del color presentado

Para responder la pregunta acerca de cuál es el error que cometemos al discriminar, por ejemplo, entre dos longitudes de onda cercanas, necesitamos saber primero cuál es la representación media de cada una de esas longitudes de onda en nuestro cerebro y cuál es la distancia perceptual entre esas dos representaciones. A través de nuestro modelo podemos deducir el mejor estimador para el estímulo presentado y el error que cometen los fotorreceptores debido al solapamiento entre sus curvas de absorción.

Dada una respuesta por parte de los fotorreceptores, es decir, dado \vec{K} , podemos decodificar el estímulo $\vec{\alpha}$ que maximiza la $P[\vec{\alpha}|\vec{K}]$ a través del método de máxima verosimilitud. Usando la regla de Bayes

$$P[\vec{\alpha}|\vec{K}] = \frac{P[\vec{K}|\vec{\alpha}][P[\vec{\alpha}]]}{P[\vec{K}]},$$

y suponiendo que ningún estímulo se ve favorecido en algún sentido, es decir, que la probabilidad a priori $P[\vec{\alpha}]$ es constante, la probabilidad a posteriori $P[\vec{\alpha}|\vec{K}]$ es proporcional a la probabilidad $P[\vec{K}|\vec{\alpha}]$. Entonces, para decodificar el estímulo que maximiza $P[\vec{\alpha}|\vec{K}]$ podemos maximizar $P[\vec{K}|\vec{\alpha}]$ que es la distribución de probabilidad que deducimos en 3.17. Encontrar el máximo de $P[\vec{K}|\vec{\alpha}]$ es equivalente a encontrar el máximo de su logaritmo natural, es decir de

$$\ln P[\vec{K}|\vec{\alpha}] = \sum_{i \in S, M, L} K_i \ln(\alpha_i) - \sum_{i \in S, M, L} \alpha_i - \sum_{i \in S, M, L} \ln K_i!.$$

El mejor estimador $\hat{\alpha}_i$ es el que anula la derivada de este logaritmo respecto del estímulo. Entonces pedimos que

$$\left. \frac{\partial \ln P[\vec{K}|\vec{\alpha}]}{\partial \vec{\alpha}} \right|_{\alpha_i = \hat{\alpha}_i} = 0,$$

y esta condición se cumple si

$$K_i = \hat{\alpha}_i,$$

donde $i \in S, M, L$. Esto significa que el valor medio $\langle \hat{\alpha}_i \rangle = \langle K_i \rangle$ del estimador de máxima verosimilitud que el sistema nervioso obtiene a partir del valor de K_i coincide con el valor real α_i , ya que para la distribución poissoniana, $\langle K_i \rangle = \alpha_i$. Es decir que dado un estímulo $\vec{\alpha}$, el mejor estimador para ese estímulo coincide, en valor medio, con el mismo estímulo. Los resultados de los experimentos en discriminación cromática se muestran como el error cometido por el sujeto en función de la longitud de onda presentada (ver figuras 1.13 y 1.14) es decir, en función del estímulo. Hacemos esta

aclaración porque podría suceder que la respuesta media del observador no coincida con el mejor estimador de ese estímulo, y que por ejemplo existieran sesgos. Sin embargo, como acabamos de demostrar, bajo las hipótesis planteadas en este trabajo, es correcto mostrar los resultados de los errores al discriminar colores cercanos en función del estímulo presentado, ya que este coincide con la media de las respuestas.

4.2. Reconstrucción de la función de luminosidad aparente

En la historia de la colorimetría y de representaciones del color, hay un acuerdo tácito en considerar a la luminosidad como una variable independiente de las características puramente cromáticas de la imagen, es decir, hue y saturación. Y que, por lo tanto, tanto el hue como la saturación están bien representados en un espacio bidimensional donde la componente de luminosidad se establece con un valor constante determinado. En la sección 2.1 explicamos la selección particular de coordenadas que se realizó en la CIE 1931 para descartar la luminosidad como dimensión cromática del espacio CIE xy 1931. Allí, se eligió mantener constante a la coordenada Y , ya que la dependencia funcional de esta coordenada con la longitud de onda incidente ($Y(\lambda)$) se asemeja a la forma de la curva de la luminosidad aparente en condiciones fotópicas. Sin embargo, nosotras consideramos en nuestro análisis las coordenadas naturales $\alpha_S, \alpha_M, \alpha_L$ que resultan del filtrado que realizan los conos presentes en la retina del haz de luz que incide sobre ella. Ese sistema de coordenadas es tridimensional, y tanto las características cromáticas de la imagen como su luminosidad necesariamente están condicionados por ellas.

En el capítulo 3 introducimos la distribución de probabilidad que describe el proceso de absorción de fotones que tiene lugar en la retina, dadas las coordenadas $\vec{\alpha}$ de la luz que incide sobre ella (ver expresión 3.17). Esta distribución de probabilidad explica la estadística de absorción de fotones por parte de los conos, luego los conos traducen esta información en señales eléctricas que viajan por el tejido neural siguiendo el camino del sistema visual (ver figura 1.2). Esto significa que cuando un observador ve una imagen, una vez que sus conos capturan los fotones que provienen de ella, su cerebro no tiene más información que la que contenida en el vector \vec{K} , es decir, que el número de fotones absorbidos por cada tipo de cono. Bien podría suceder que las etapas de procesamiento posterior den lugar a cálculos en los que se decorrelacione la componente luminosa respecto de las otras características de la imagen. De hecho, sabemos que hay células del núcleo geniculado lateral que responden separadamente a la luminosidad. Y que en ellas está inspirado el espacio de color DKL cuyas coordenadas son un reflejo de los canales de información presentes en el núcleo geniculado lateral, $L + M$ para la

luminosidad, y $L - M$, $S - (L + M)$ para los canales cromáticos.

En esta sección queremos analizar hasta qué punto podríamos deducir la sensibilidad a la luminosidad con la información presente en el modelo de la estadística de la lluvia de fotones, esta vez, en términos fenomenológicos. Para ello, inferimos que, para la actividad de los conos, la luminosidad debería ser una cantidad relacionada con la suma total de los fotones que pueden absorber, ya que si un determinado espectro de color cambia únicamente en un factor de escala, percibiremos igual su cromaticidad, y sólo notaremos cambios referidos al brillo. Mientras que las coordenadas $\vec{\alpha}$ del segundo color serán iguales a las del primero multiplicadas por el mismo factor de escala. Inspiradas en este fenómeno, calculamos el promedio (con la distribución de probabilidad 3.17) de la suma del número de fotones absorbidos por los conos para estímulos monocromáticos con un espectro de la forma $I(\lambda) = I_0\delta(\lambda - \lambda_0)$ donde I_0 es un valor constante y positivo, y λ_0 es la longitud de onda característica de ese color. El resultado es

$$\left\langle \sum_{\ell \in \{S, M, L\}} K_\ell \right\rangle_{P(\vec{K}|\vec{\alpha})} = I_0 \sum_{\ell \in \{S, M, L\}} q_\ell(\lambda_0), \quad (4.1)$$

y por lo tanto, el promedio de la suma de los K_ℓ fotones absorbidos es igual a la suma de las probabilidades de absorción de cada tipo de cono en la longitud de onda λ_0 del estímulo multiplicada por la intensidad constante I_0 .

Propusimos el resultado de la expresión 4.1 como la sensibilidad a la luminosidad de los conos y en la figura 4.1 (a) mostramos el resultado normalizado, con norma euclídea, en función de la longitud de onda del estímulo junto con los datos medidos experimentalmente reportados por la CIE 1924. Supusimos en este caso que la composición de la retina del observador es una usual con proporciones $\beta_S = 0,02$, $\beta_M = 0,49$ y $\beta_L = 0,49$ de conos S , M y L , respectivamente. Podemos ver que ambas curvas son muy similares, lo que podría indicar que el promedio de la suma de fotones absorbidos a nivel de los conos es un cómputo que sobrevive a lo largo del camino visual.

Por otro lado, hicimos el cálculo equivalente para sujetos dicrómatas, con el fin de compararlo con las curvas de sensibilidad a la luminosidad medidas experimentalmente. En estos casos, el promedio de la suma de los fotones absorbidos por los conos tiene dos términos, es decir,

$$\left\langle \sum_{\ell \in \{u, v\}} K_\ell \right\rangle_{P^d(\vec{K}|\vec{\alpha})} = I_0 \sum_{\ell \in \{u, v\}} q_\ell(\lambda_0), \quad (4.2)$$

donde el supraíndice d en la probabilidad indica que se trata de la distribución de

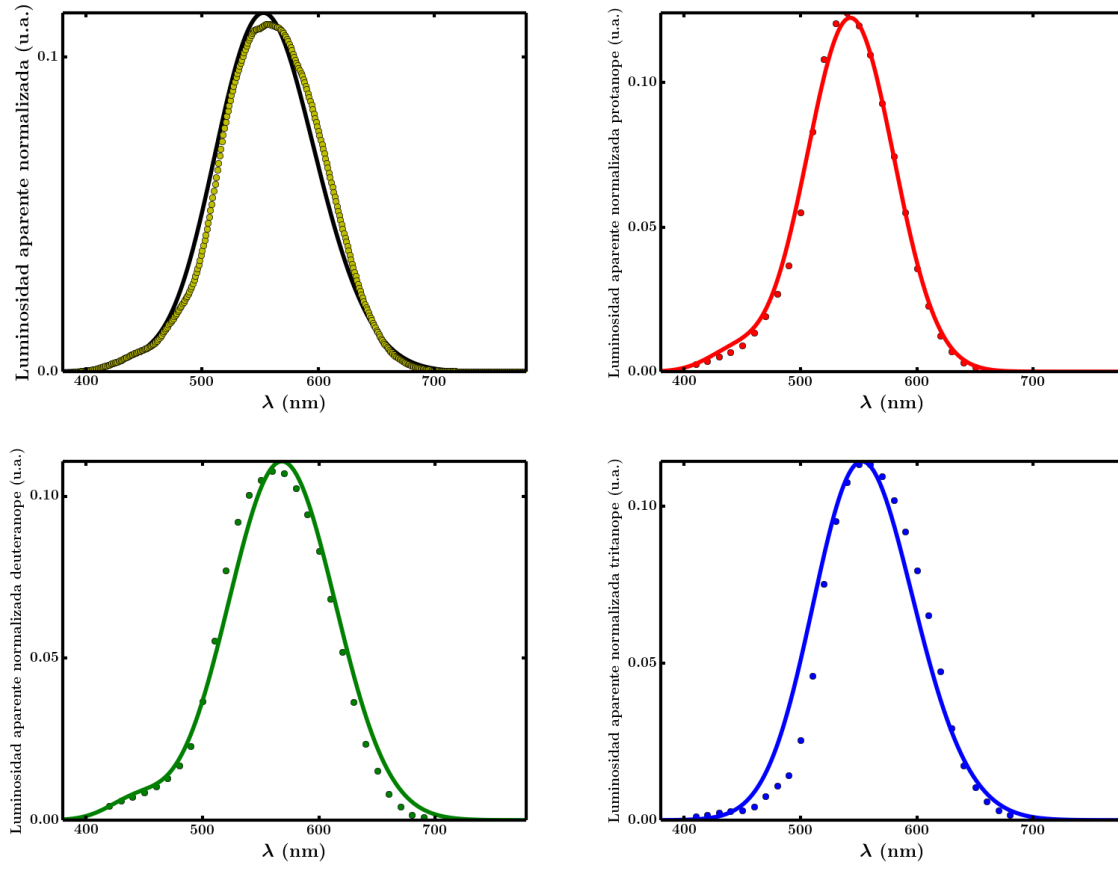


Figura 4.1: Luminosidad aparente normalizada con norma euclídea. A: Curva de sensibilidad a la luminosidad normalizada en condiciones fotópicas medida para personas tricrómatas en puntos amarillos (datos tomados de <http://www.cvrl.org/>) y nuestra predicción teórica normalizada en línea negra, con proporciones de conos $\beta_S = 0,02$, $\beta_M = 0,49$, y $\beta_L = 0,49$. B: Curva de sensibilidad a la luminosidad normalizada medida para protanopes en puntos rojos, y nuestra predicción teórica normalizada en línea roja, con proporciones de conos $\beta_S = 0,05$, y $\beta_M = 0,95$. C: Curva de sensibilidad a la luminosidad normalizada medida para deuteranopes en puntos verdes, y nuestra predicción teórica normalizada en línea verde, con proporciones de conos $\beta_S = 0,05$, y $\beta_L = 0,95$. D: Curva de sensibilidad a la luminosidad normalizada medida para tritanopes en puntos azules, y nuestra predicción teórica normalizada en línea azul, con proporciones de conos $\beta_M = 0,5$, y $\beta_L = 0,5$. Los datos para daltónicos fueron tomados de [11].

probabilidad dicrómata

$$P(\vec{K}|\vec{\alpha}) = \prod_{\ell \in \{u,v\}} \text{Poisson}(K_\ell|\alpha_\ell). \quad (4.3)$$

donde u, v es igual a S, M para los protanopes, a S, L para los deuteranopes, y a M, L para los tritanopes. En los paneles (b), (c), y (d) de la figura 4.1 se pueden ver los datos experimentales junto a los resultados teóricos para cada tipo de daltonismo, ambos normalizados con norma euclídea. En estos casos, supusimos que las retinas de los observadores protanopes y deuteranopes contenían un 5 % de conos S y un 95 % del otro cono, mientras que para la retina del observador tritanope supusimos 50 % para cada uno de sus tipos de conos. Nuevamente, vemos que nuestra predicción se asemeja

mucho al conjunto de datos obtenidos experimentalmente. Más aún notamos que los resultados de observadores tricrómatas, protanopes, y deuteranopes, si bien tienen forma acampanada, el comportamiento a un lado y al otro del máximo no es simétrico, mientras que la curva de los tritanopes sí presenta cierta simetría. Las curvas predichas teóricamente también presentan este fenómeno, reflejo de la presencia de conos S en el cómputo de las expresiones 4.1 y 4.2 para prota y deuteranopes. Los tritanopes, no tienen conos S , y las curvas de absorción de los conos M y L se superponen en gran medida, dando como resultado una curva de luminosidad aparente simétrica alrededor de su máximo, al menos cuando las proporciones de conos M y L es la misma. En las primeras tres situaciones, la presencia de los conos S , aunque sea en una pequeña proporción, es responsable de generar el hombro en longitudes de onda corta que da lugar a la asimetría antes mencionada.

Dado que a través de nuestro modelo podemos predecir la diferencia entre las curvas de sensibilidad a la luminosidad de sujetos con retinas de composición genéticamente diferente, consideramos que la etapa de absorción de los conos en la retina cumple un rol fundamental. Creemos que, o bien las etapas de procesamiento posterior no introducen grandes cambios en este cómputo, o bien es posible recuperarlo a un nivel consciente. Nuestra teoría predice que la presencia de conos S afecta la sensibilidad a la luminosidad en la región del espectro visible donde este tipo de conos puede absorber fotones.

4.3. Conclusión

En este capítulo dedujimos cuál es la mejor estimación del estímulo presentado que puede hacerse a partir de la actividad de los conos en la retina del observador. Dado el modelo de ruido presentado en 3, donde analizamos la estadística de la lluvia de fotones incidiendo sobre los conos cuando el observador mira un determinado color, la mejor estimación del estímulo presentado coincide, en valor medio, con el mismo estímulo. Y por lo tanto, la representación del estímulo en el marco de nuestro modelo no presenta sesgos. Por otro lado, demostramos aquí que podemos predecir el resultado de la sensibilidad a la luminosidad espectral tanto para sujetos tricrómatas como para sujetos dicrómatas, y que la luminosidad aparente es igual al promedio de la suma de todos los fotones absorbidos por los conos.

Capítulo 5

Discriminación cromática

“Todavía puedo descifrar algunos colores, todavía puedo descifrar el verde y el azul. Hay un color que no me ha sido infiel, el color amarillo”

— Jorge Luis Borges

Como todo fenómeno neuronal, la discriminación cromática es, hasta cierto punto, un proceso ruidoso. En este trabajo apuntamos a determinar hasta qué punto el grado de estocasticidad en el número de fotones absorbidos puede explicar la habilidad con que los humanos discriminamos entre dos colores cercanos. Con ese fin, primero analizamos la absorción de un espectro puro, es decir, compuesto por una sola longitud de onda, y luego describimos el proceso para una mezcla arbitraria de longitudes de onda.

5.1. Discriminación entre dos longitudes de onda cercanas

Mediante la ecuación 3.10 establecemos el mapeo probabilístico entre cada longitud de onda λ y el número (K_L, K_M, K_S) . Luego, los fotorreceptores convierten ese número de fotones absorbidos en señales eléctricas que son procesadas por el resto del cerebro. Desde el punto de vista de la teoría de la información, la desigualdad en el procesamiento de datos [25] asegura que la información cromática que se codifica en las etapas posteriores del procesamiento no puede ser mayor que la cantidad de información cromática contenida en el vector $\vec{K} = (K_L, K_M, K_S)$. Por lo tanto, un sujeto consciente, no puede dar una mejor respuesta que la de inferir el estimador óptimo de la longitud de onda λ a partir de la actividad de los fotorreceptores. La cota de Cramér-Rao introducida en la sección 2.2, establece una relación entre la información de Fisher y la precisión con que se puede inferir un parámetro a través de los datos [32]. En nuestro caso, nos da una cota para la varianza del estimador sin sesgo, o

equivalentemente, una cota para el error

$$\Delta\lambda \geq \frac{1}{\sqrt{J(\lambda)}}.$$

Esto implica que el mínimo error del observador ideal es igual a la inversa de la raíz cuadrada de la información de Fisher $J(\lambda)$ contenida en el mapeo probabilístico de la ecuación 3.10.

A lo largo de este trabajo usamos las curvas de sensibilidad espectral de los conos reportadas por Stockman y Brainard [9]. Para poder trabajar con funciones diferenciables, aproximamos estas curvas experimentales por funciones del tipo $h_i(\lambda) = \exp[-(\lambda - \lambda_i)^2/\sigma_i^2]$, con parámetros λ_i y σ_i , que coinciden con la posición del máximo y el ancho de los datos. En la figura 2.3, mostramos los datos originales y el resultado del ajuste (los parámetros ajustados se pueden ver en epígrafe). Si usamos esta aproximación, e insertamos la expresión 3.10 en la ecuación 2.4, obtenemos

$$J(\lambda) = I(\lambda) \sum_{i \in \{S, M, L\}} \frac{[q'_i(\lambda)]^2}{q_i(\lambda)} \quad (5.1)$$

$$= 4I(\lambda) \sum_{i \in \{S, M, L\}} \frac{(\lambda - \lambda_i)^2}{\sigma_i^4} e^{-(\lambda - \lambda_i)^2/\sigma_i^2}. \quad (5.2)$$

La expresión formal de la ecuación 5.1 fue derivada por Dayan y Abbot [33], y se aplicó por primera vez en el contexto cromático por Zhaoping [31]. En este trabajo, introducimos la expresión analítica 5.2. Cabe notar que la cantidad de información de Fisher es proporcional a la intensidad de la fuente de luz, representada en la ecuación 5.2 por el promedio en el número de fotones $I(\lambda)$.

En la figura 5.1, mostramos la estimación del mínimo error $\Delta\lambda = 1/\sqrt{J(\lambda)}$

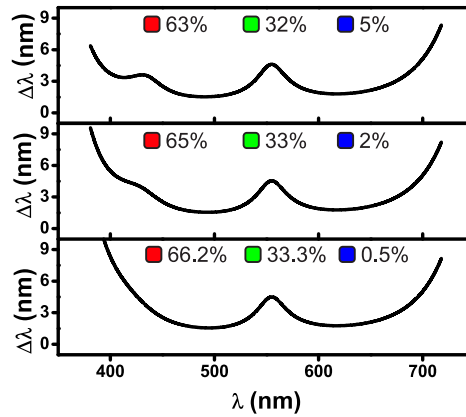


Figura 5.1: Mínimo error de discriminación $\Delta\lambda$ como función de las longitudes de onda de referencia λ , obtenido a partir de 5.2. Las diferentes curvas corresponden a diferentes proporciones de conos S (azul), M (verde) y L (rojo), tal como está indicado en las leyendas. Para todas las longitudes de onda incidentes, se tomó un número medio de fotones $I(\lambda) = 1000$.

obtenido a partir de 5.2, para sujetos cuyas retinas contienen diferentes proporciones de conos S , M y L .

Con el fin de hacer coincidir la escala de nuestros resultados (ver figura 5.1) con la de los resultados experimentales (ver figura 1.13(a)), tomamos un número medio de fotones igual a 1000. La forma de las curvas teóricas es claramente similar a la de las curvas medidas experimentalmente.

Existen trabajos donde se muestra que entre retinas de distintos sujetos hay una diferencia sustancial en la proporción de los distintos tipos de conos [34]. La variabilidad en la distribución de los conos alcanza para explicar las diferencias entre los distintos comportamientos que se ven en los resultados experimentales. Específicamente, si la proporción de conos S supera el 2% aparece un hombro en la región de longitudes de onda corta, mientras que aparece un máximo local cuando $\beta_S \geq 5\%$. Cuanto más grande sea la proporción de conos S , mayor será la altura del pico a ~ 450 nm.

La variabilidad en la proporción de los conos S es un factor crucial a la hora de determinar la forma de $\Delta\lambda$. Los seres humanos tenemos, además, una marcada variabilidad en la proporción relativa de los conos M y L [35], representada en la ecuación 5.2 a través de los factores β_M y β_L . Sin embargo, si cambiamos esta proporción manteniendo fija la suma $\beta_M + \beta_L$, la forma de la curva no se ve modificada. La cone fundamental de los conos M y la de los conos L están bastante solapadas, entonces una variación relativa en la proporción β_M/β_L produce un cambio despreciable en $\Delta\lambda$.

La habilidad para la discriminación cromática está limitada por la imprecisión con que representamos colores vecinos en el cerebro. En nuestro modelo, esta precisión está limitada por la estocasticidad de K_S , K_M y K_L . La estocasticidad descrita en $P(\vec{K}|\vec{\theta})$ no representa la naturaleza intrínsecamente impredecible del funcionamiento de los fotorreceptores a nivel de neurona sola, como por ejemplo en la isomerización de la rodopsina, o en la liberación espontánea de un neurotransmisor. Estos eventos están presentes y sin embargo, no dependen de la longitud de onda (si lo hacen, nosotras no los consideramos en el modelo). La estocasticidad incluida en $P(\vec{K}|\vec{\theta})$ refleja la impredecibilidad de la proporción exacta de los fotones capturados por los conos S , M y L , dado que las curvas de absorción de los fotorreceptores se solapan entre sí. La varianza de K_i es igual a $Kq_i(1 - q_i)$, y por lo tanto, es máxima cuando ambos q_i y $1 - q_i$ están lejos de ser nulos. Para los conos M y L , esta condición se cumple aproximadamente a 550 nm, donde ambas probabilidades de absorción son altas. La curva del error de discriminación medida experimentalmente en humanos tiene un máximo local en ≈ 550 nm, que coincide aproximadamente con la longitud de onda donde los humanos percibimos mejor la luminosidad [14] (ver figura 1.6). Más allá de que esta coincidencia parece accidental, analizando las ecuaciones involucradas en nuestro estudio, podemos ver, sin embargo, que la habilidad para discriminar el color está determinada por la derivada de las quantal cone fundamentals: cuanto más grande es la derivada mayor es

la información de Fisher. Por otro lado, este resultado está en desacuerdo con trabajos previos [36], donde la región de máxima habilidad en la discriminación cromática se espera en los picos de las cone fundamentals. En el contexto de la teoría de Fisher, la habilidad en la discriminación se espera que sea mínima en esos picos, porque en esas longitudes de onda las derivadas tienden a cero. Como las cone fundamentals de los conos M y L son muy similares, y dado que la varianza es particularmente grande a ≈ 550 nm, los dos máximos no se pueden separar, y el error en la discriminación tiene un pico en la longitud de onda que es aproximadamente igual al promedio de los máximos de las curvas de absorción de los conos M y L . La coincidencia, entonces, está fundada en las propiedades matemáticas de la información de Fisher. Si el número de conos S es suficientemente grande, entonces se alcanza otro máximo local en el error de discriminación donde la curva de absorción de los conos S tiene un pico, ≈ 450 nm. Más aún, nuestra teoría también predice cómo varía la habilidad para discriminar colores cercanos con la composición de la retina. Sugiere que las diferencias en las propiedades anatómicas de los observadores pueden explicar la variabilidad de los datos experimentales.

5.1.1. Discriminación entre dos longitudes de onda cercanas por dicrómatas y tetracrómatas

El marco teórico que desarrollamos en este trabajo nos permite también predecir la discriminación en longitud de onda de otros observadores, aún cuando no se haya medido experimentalmente. En esta sección mostramos la predicción del error de discriminación entre dos longitudes de onda cercanas para los sujetos daltónicos, los tetracrómatas, y finalmente para pájaros que tienen también cuatro tipos de conos.

Los daltónicos son personas que no tienen los tres tipos de conos descriptos. Si tienen solamente dos tipos de conos, se llaman dicrómatas, mientras que si sólo tienen un tipo se los llama monocrómatas. Haciendo una reducción de nuestra teoría a dos tipos de conos en lugar de tres podemos predecir el error de discriminación para los casos dicrómatas: protanopes (con conos S y M), deuteranopes (con conos S y L), y tritanopes (con conos M y L). La distribución de probabilidad que refleja el proceso de absorción de fotones por una retina con dos tipos de conos es idéntica a la de la expresión 3.10, con la diferencia de que el índice i corre sobre dos tipos de conos en vez de tres. El resultado es un producto de dos distribuciones poissonianas con media y varianza $I(\lambda)q_i(\lambda)$ con i igual a los correspondientes tipos de conos para el tipo de dicromatismo en cuestión. Por su parte, la información de Fisher de la expresión 5.2 se ve reducida de igual manera y la suma corre sobre dos subíndices en lugar de tres. En la figura 5.2 mostramos el mínimo error de discriminación en sujetos que tienen dos tipos de conos con las distintas proporciones propuestas.

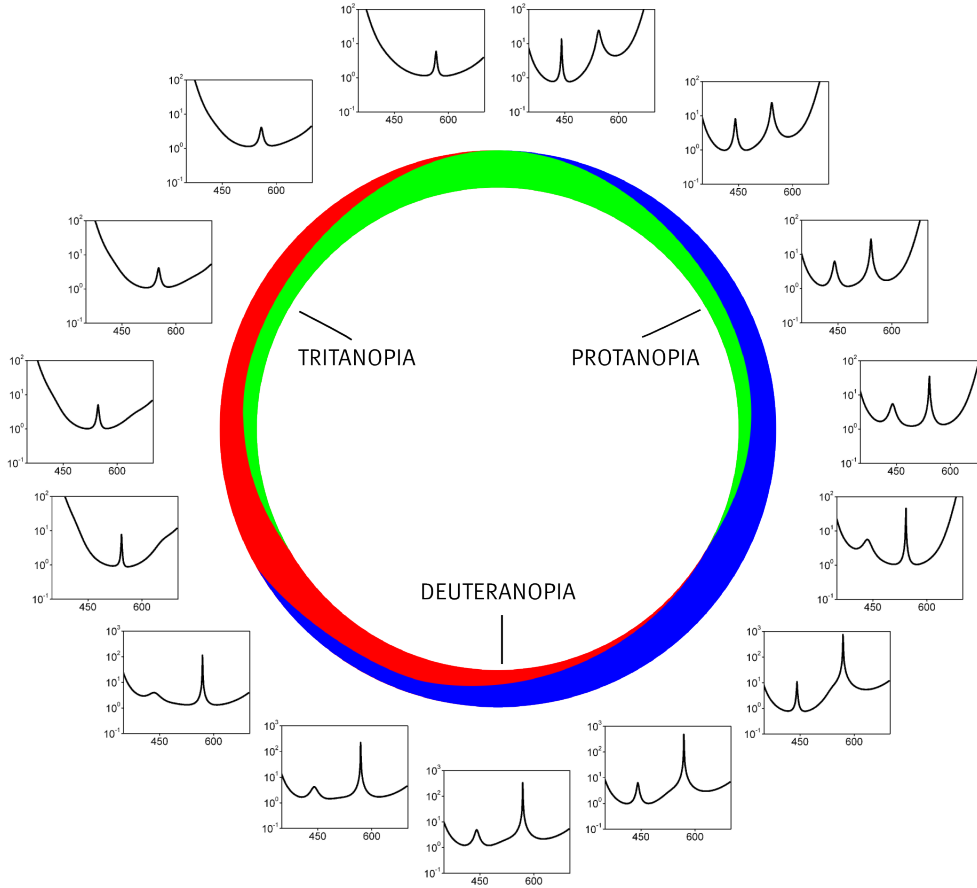


Figura 5.2: En cada gráfico se muestra el logaritmo del mínimo error de discriminación $\Delta\lambda$ como una función de la longitud de onda λ , obtenido a partir de la reducción de la expresión 5.2 a dos tipos de conos en distintas proporciones. Abajo: logaritmo del error predicho para una retina con una proporción de 50 % de conos S y 50 % de conos L representada por los dos colores que se ven en el círculo interno. Recorriendo ese círculo en sentido horario, los errores predichos en escala logarítmica para retinas cuyas proporciones de conos están expresadas como porcentajes: 30 S y 70 L , 10 S y 90 L , 10 M y 90 L , 30 M y 70 L , 50 M y 50 L , 70 M y 30 L , 90 M y 10 L , 10 S y 90 M , 30 S y 70 M , 50 S y 50 M , 70 S y 30 M , 90 S y 10 M , 90 S y 10 L , 70 S y 30 L .

Nuestro análisis también permite hacer una extensión del modelo para predecir discriminación cromática en animales cuyas retinas tienen cuatro tipos de conos. En el caso humano, basta con agregar la curva de absorción que caracteriza al cuarto tipo de cono en la distribución de probabilidad 3.10, dando como resultado un producto de cuatro factores en vez de tres. Y, por lo tanto, agregar un término en la sumatoria de la información de Fisher de la expresión 5.2. En el caso de animales no humanos, la derivación de la expresión 3.10 es la misma, y el índice i corre sobre el número y tipo de conos del animal en cuestión. Siempre que sus curvas de absorción se puedan ajustar por una función del tipo $h_i(\lambda) = \exp[-(\lambda - \lambda_i)^2 / \sigma_i^2]$ como las de la figura 2.3, la información de Fisher será la misma que la de la expresión 5.2. De no ser así, habrá que promediar la derivada segunda del logaritmo de la probabilidad como lo indica la ecuación 2.4. En la figura 5.3 mostramos el mínimo error de discriminación en sujetos que tienen

cuatro tipos de conos. En el panel (a), se puede ver otro caso tetracrómata que es el de los pájaros. Sus curvas de absorción son aproximadamente equidistantes una de la

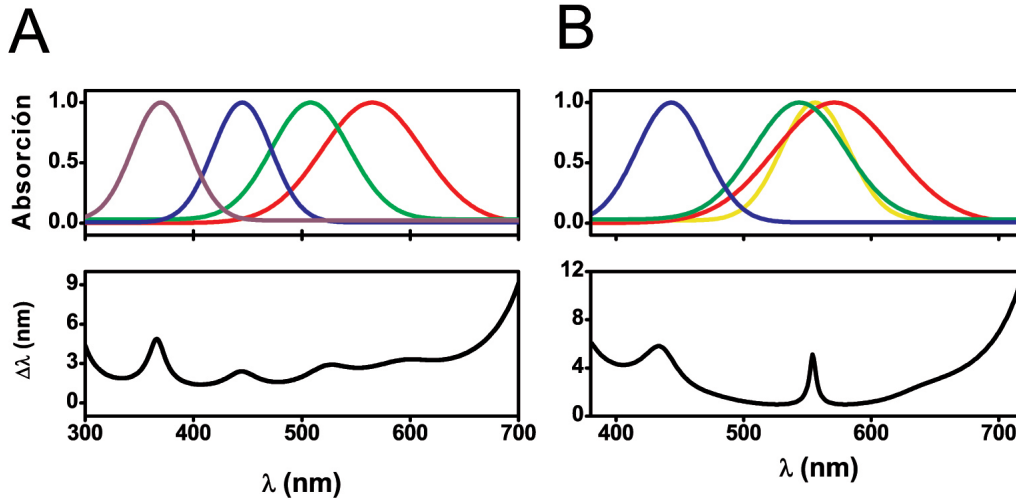


Figura 5.3: Mínimo error de discriminación $\Delta\lambda$ como una función de la longitud de onda λ , obtenido a partir de la generalización de la expresión 5.2 a cuatro tipos de conos. A Arriba: las curvas de absorción de los pájaros estríldidos [37] con máximos locales en las longitudes de onda $\lambda_i = 368, 445, 508, 565$ nm, y anchos $\sigma_i = 38,58, 38,44, 52,87, 65,8$ nm, respectivamente. Abajo: error predicho para la discriminación cromática, con un número medio de fotones igual 1000. Los parámetros β_i se eligieron iguales a 0,25 para todos los conos. B Arriba: cone fundamentals de un ser humano tetracrómata [10]. La curva adicional (en amarillo) tiene un pico en $\lambda_y = 555$ nm, y un ancho $\sigma_y = 38,51$ nm. Abajo: error predicho para la discriminación cromática, con un número medio de fotones igual a 1000. Los parámetros β_i se eligieron iguales a 5 %, 31.33 %, 31.34 % y 31.33 % para los conos S, M, Y , y L , respectivamente.

otra [37], y por ende presentan una habilidad en la discriminación cromática precisa que se extiende hasta la región ultravioleta del espectro. Se pueden ver cuatro máximos locales en $\Delta\lambda$, que se corresponden con cada una de las cuatro curvas de absorción.

En el panel (b), mostramos los resultados para un ser humano tetracrómata, es decir, que tiene cuatro tipos de conos, los tres que presenta la mayoría de la población más un cuarto tipo. La curva de absorción de este tipo de cono se hipotetiza que se encuentra entre las curvas de los conos M y L , como el sujeto anómalo cDa29 estudiado por Jordan [10]. A pesar de la incorporación de esta curva adicional, su habilidad para discriminar colores cercanos tiene una forma similar a la de los sujetos tricrómatas. Como las curvas de absorción de los conos M y L de tricrómatas están muy solapadas, agregar una curva más en la misma región de longitudes de onda no cambia significativamente la forma de $\Delta\lambda$. Claro que esto no significa que los tetracrómata de la figura 5.3 (b) perciben el mismo espacio de colores que los tricrómatas. Sólo si nos restringimos al problema de discriminación cromática entre haces monocromáticos cercanos, podemos decir que no hay una diferencia sustancial entre sujetos tetracrómata y tricrómatas. El espacio de color también incluye mezclas de colores, por ejemplo, el púrpura se obtiene mezclando rojo con azul y no es metamérico a ningún haz monocromático. Los tetracrómata pueden percibir un número mayor de mezclas que no pueden ser

mapeadas en el espacio de color tricromático. Nuestro análisis predice, sin embargo, que su habilidad para discriminar colores cercanos provenientes de haces monocromáticos se mantiene sin cambios.

5.2. Discriminación entre dos haces compuestos por diferentes longitudes de onda

Para extender el análisis previo a todo el espacio de colores, debemos escribir la información de Fisher como una función de las coordenadas que describen la cromaticidad de una fuente de luz arbitraria $I(\lambda)$. En la sección 3.1.3 mostramos que la distribución de probabilidad $P(\vec{K}|\vec{I}) = P(\vec{K}|\alpha_S, \alpha_M, \alpha_L)$. En otras palabras, el vector \vec{K} de fotones absorbidos es ciego a todos los aspectos del espectro $I(\lambda)$ que no están contenidos en el vector que resulta de los productos escalares

$$\vec{\alpha} = (\alpha_S, \alpha_M, \alpha_L).$$

Por lo tanto, la matriz de información de Fisher está definida en el espacio de todos los parámetros posibles $\vec{\alpha}$. Reemplazando, 3.17 en 2.4, obtenemos

$$J(\vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_S} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_M} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_L} \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

El tensor métrico es diagonal, y esto implica que los elipsoides que definen los puntos que están a una distancia constante de los parámetros $\vec{\alpha}$ dados tienen los ejes principales alineados con los ejes principales del sistema de coordenadas.

La raíz cuadrada de la inversa de $J(\vec{\alpha})$ define un elipsoide que ocupa una región del espacio $\vec{\alpha}$ donde todos los puntos están a la misma distancia del punto central $\vec{\alpha}$ (ver sección 2.2). Los elipsoides resultantes los mostramos en la figura 5.4.

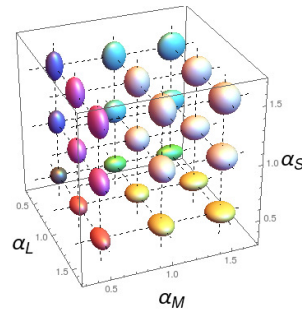


Figura 5.4: Los elipsoides indican las regiones del espacio $\vec{\alpha}$ que están a una distancia fija del punto central.

5.2.1. Discriminación en el espacio CIE 1931 xy

Para comparar nuestras predicciones con los datos experimentales, tenemos que transformar el tensor métrico de la expresión 5.3 del espacio de parámetros $\vec{\alpha}$ al espacio cromático CIE 1931 xy donde MacAdam reportó las elipses de discriminación (ver figura 1.13). Nosotras hicimos la transformación en dos pasos tal como se muestra en la sección 2.2.1. Primero, hicimos el cambio de coordenadas $(\alpha_S, \alpha_M, \alpha_L)$ a coordenadas (X, Y, Z) , y luego, de (X, Y, Z) a (x, y, Y) . Ambas transformaciones son invertibles. Una vez que tenemos la matriz de Fisher en el espacio xyY , extraemos la submatriz asociada a las componentes xy con el fin de comparar nuestros resultados con los experimentales de MacAdam. Cada una de estas dos transformaciones involucra una matriz C definida en la expresión 2.10. Si llamamos C_1 a la matriz de la primera transformación (ver expresión 2.13), y C_2 a la de la segunda (ver expresión 2.14), el resultado de concatenar las dos transformaciones deriva en una matriz $C = C_1 C_2$. Con la matriz resultante $C = C_1 C_2$, calculamos el tensor de Fisher en el espacio xyY , y luego nos enfocamos en la submatriz correspondiente a las dos primeras componentes.

Todos los coeficientes de esa submatriz de 2×2 que obtenemos son proporcionales a la variable luminosidad Y . Entonces, la longitud de los ejes principales de las elipses que definen los colores que están a una distancia constante a un determinado punto xy son proporcionales a $Y^{-1/2}$, y el área es proporcional a $1/Y$. Aparte de ser un factor de escala, la luminosidad no cumple ningún otro rol. Como las otras variables que forman parte del tensor de Fisher son adimensionales, las unidades de distancia en el espacio xy son $[Y]^{-1/2}$. A partir de nuestro modelo podemos predecir que el error mínimo de discriminación es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la intensidad de la luz, tal como lo indica la ley de Rose-DeVries, reportada originalmente para umbrales de discriminación de contraste a bajas intensidades [38] [39], y confirmada más tarde con experimentos de discriminación cromática [40]. Otros experimentos indican que esta dependencia se mantiene a bajas intensidades del régimen fotópico, pero pierde validez a medida que crece la intensidad de la luz [40]. Por lo tanto, creemos que etapas neurales posteriores del procesamiento del color que no están explicadas por este modelo poissoniano deben entrar en juego para intensidades altas de luz.

A través de la ecuación 2.9 podemos ver que estas unidades de distancia se aplican a todos los espacios. Claro que somos libres de elegir esas unidades. En este trabajo usamos las unidades de distancia de MacAdam [11] y esto implica que la distancia entre un determinado punto central y la elipse medida por MacAdam corresponde a la unidad. En este sistema, la coordenada Y es adimensional.

En la figura 5.5, mostramos las elipses que están a distancia 1 del punto central.

En (a), β_S varía dentro del rango fisiológico, a medida que β_S aumenta (de izquierda a derecha) las elipses se vuelven más redondas para valores grandes de x , y más

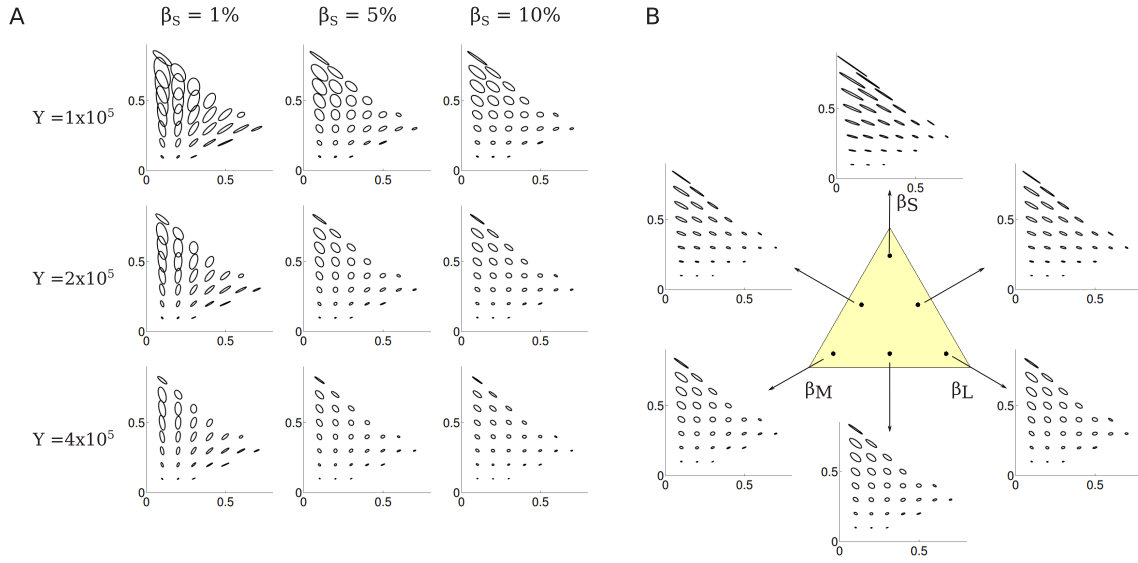


Figura 5.5: Elipses obtenidas a través de la transformación de los elipsoides de la figura 5.4. Las coordenadas cromáticas del CIE 1931 xy están representadas por los ejes horizontal y vertical, respectivamente. A: dependencia de las elipses con los parámetros β_S e Y . Tomamos $\beta_M = \beta_L = (1 - \beta_S)/2$. B: dependencia de las elipses con la composición de la retina, para $Y = 2 \times 10^5$. El triángulo representa el área del espacio $(\beta_S, \beta_M, \beta_L)$ accesible matemáticamente. Las figuras se corresponden a los parámetros $\vec{\beta} = (\beta_S, \beta_M, \beta_L) = (0,8,0,1,0,1)$ (arriba), $(0,45,0,1,0,45)$, $(0,1,0,1,0,8)$, $(0,1,0,45,0,45)$, $(0,1,0,8,0,1)$ y $(0,45,0,45,0,1)$ si rotamos en el sentido horario. Aumentamos 10 veces las elipses para que se vean mejor.

verticales para valores grandes de y . Aumentando los valores de Y (de arriba hacia abajo) disminuye el área de las elipses.

En (b), mostramos las elipses para retinas con diferentes composiciones de conos β_i que son matemáticamente posibles, pero no son realistas por no encontrarse en la naturaleza. En este contexto, cualquier conjunto de $(\beta_S, \beta_M, \beta_L)$ define una retina posible, en tanto y en cuanto todos los β_i sean positivos, y los tres sumen uno. En el espacio de los posibles vectores $\vec{\beta}$, estas condiciones definen el triángulo ilustrado en la figura. A medida que nos movemos a lo largo de la base del triángulo, confirmamos que la proporción relativa de los β_M y β_L no cambia cualitativamente las elipses (ver los tres paneles de abajo). Aumentar β_S (moviéndose hacia arriba), sin embargo reduce el tamaño de las elipses en la dirección $(1, 1)$, y lo aumenta a lo largo de la dirección $(-1, 1)$. En otras palabras, aumentar la proporción de β_S ayuda a discriminar entre los estímulos azules y los amarillos, pero tiene un efecto perjudicial a la hora de discriminar entre rojo y verde. Las elipses correspondientes al área interna del triángulo interpolan suavemente las del borde.

Con el fin de comparar nuestras predicciones con los resultados experimentales de MacAdam, necesitamos ajustar los parámetros β_S e Y que se dejan fijos durante el experimento. Para hacerlo, variamos sistemáticamente $\beta_S \in (0, 0,1)$ e $Y \in (0, 10^6)$ y comparamos las elipses teóricas resultantes para cada uno de los 25 puntos donde midió MacAdam con las 25 elipses medidas por él. Elegimos entonces, los parámetros

óptimos como aquellos que maximizan la similitud entre los dos conjuntos de elipses. Para hacer esa comparación, necesitamos un criterio de similitud entre elipses. Dos elipses concéntricas pueden diferir en tamaño, orientación, y/o excentricidad. Con el fin de evaluar estos tres aspectos simultáneamente, y de pesar adecuadamente la relevancia de cada uno, definimos la distancia entre dos elipses concéntricas como la divergencia de Kullback-Leibler entre dos distribuciones gaussianas cuyas matrices de covarianza están definidas por las elipses testeadas. A medida que las dos distribuciones son más y más parecidas entre ellas, las dos elipses coinciden, y esto implica que simultáneamente coinciden su tamaño, su elongación y su excentricidad. Promediando sobre los 25 puntos medidos, β_S e Y se ajustan minimizando

$$D = \frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} D_{KL} [\mathcal{N}(\mathbf{r}_i, \Sigma_i^{th}) || \mathcal{N}(\mathbf{r}_i, \Sigma_i^e)] ,$$

donde la suma corre sobre las 25 elipses medidas por MacAdam, D_{KL} es la divergencia de Kullback-Leibler, $\mathcal{N}(\mathbf{r}, \Sigma)$ es la distribución conjunta centrada en los colores \mathbf{r}_i donde MacAdam realizó su experimento, y con matriz de covarianza Σ . El supraíndice th representa la matriz teórica, y e la matriz experimental. Construimos la matriz de covarianza experimental a partir de las elipses reportadas: calculamos la matriz cuyos autovectores están en la dirección de los ejes principales de las elipses reportadas por MacAdam, y cuyos autovalores coinciden con la longitud de los ejes principales. La matriz de covarianza teórica es la raíz cuadrada de la inversa de la información de Fisher. La forma analítica de la divergencia de Kullback-Leibler para distribuciones gaussianas multivariadas fue derivada por Duchi [41]. Cuando D se usa como criterio de ajuste, la bondad del ajuste se puede definir en términos del valor de R^2

$$R^2 = 1 - \frac{D}{D_e},$$

donde D_e es la divergencia de Kullback-Leibler promedio entre todas las elipses experimentales.

En la figura 5.6 (a) se puede ver la dependencia de D con los parámetros β_S e Y . Los valores óptimos son $\beta_S = 2,1\%$ e $Y = 184,000$, para los que $D = 0,36$, y $R^2 = 0,87$. En la figura 5.6 (b), vemos que el modelo efectivamente describe la variación de tamaño, orientación y excentricidad de las elipses a medida que nos movemos desde la esquina de los violetas hacia el centro del espacio cromático, y luego hacia arriba hasta la zona de los verdes. De una manera cuantitativa, el valor R^2 que obtuvimos implica que la teoría explica un 87 % de la variabilidad de los datos experimentales.

Existen numerosos trabajos previos donde se derivan las elipses de discriminación mínima a partir de elementos de línea [11]. Dichas teorías usan argumentos heurísticos

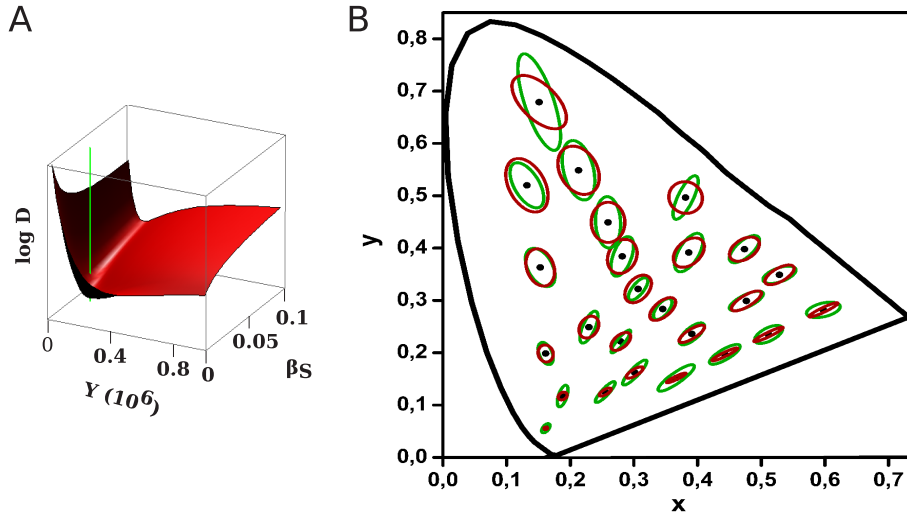


Figura 5.6: Comparación entre la teoría y el experimento. A: distancia D entre las elipses teóricas y las experimentales como una función de los parámetros β_S e Y . La línea vertical verde indica el sitio donde los parámetros son óptimos $\beta_S = 2,1\%$ e $Y = 184,000$. B: elipses medidas por MacAdam (verde) [23] comparadas con las derivadas a partir del modelo teórico (rojo) para los parámetros óptimos. Para una mejor visualización, el tamaño de las elipses se aumentó 10 veces.

para proponer funciones $g_{ij}(\vec{\theta})$ que definen el elemento de distancia

$$|\mathrm{d}\vec{\theta}|^2 = \sum_{ij} g_{ij}(\vec{\theta}) \mathrm{d}\theta_i \mathrm{d}\theta_j,$$

donde i y j corren sobre las coordenadas del espacio de color. Al no estar enmarcadas en la geometría de Fisher, estas teorías no tienen en cuenta ni el procesamiento de los datos ni la cota de Cramér-Rao. La ventaja de la información de Fisher es que nos brinda un marco matemático muy riguroso para derivar la métrica a partir de un modelo de ruido, y además nos permite hacer transformaciones de la métrica de un espacio a otro. Para un modelo de ruido dado, la métrica de Fisher es inimputable. Claro que el modelo de ruido subyacente todavía puede entrar en discusión. Necesitamos entonces confrontar las elipses derivadas con la métrica de Fisher con las medidas experimentalmente mediante un método sistemático que nos permita evaluar adecuadamente los posibles modelos de ruido. Nosotras deducimos de primeros principios un modelo basado en la descripción del proceso de absorción de fotones y hacemos la confrontación con los datos experimentales. Nuestro modelo poissoniano representa de manera simple la estadística del recuento de fotones absorbidos por los fotorreceptores y explica $\approx 87\%$ de la varianza de las mediciones realizadas en el espacio cromático CIE 1931 xy .

5.2.2. Discriminación en el espacio DKL

Las elipses de discriminación cromática se midieron más adelante a través de otro paradigma y fueron proyectadas sobre otro espacio llamado *DKL* [24]. Este es un espacio tridimensional donde la cromaticidad se representa en el plano perpendicular a la coordenada que representa la luminosidad. Sus ejes representan la oponencia de la salida de los conos, teniendo en cuenta las características oponentes al color del campo receptivo de las neuronas del núcleo geniculado lateral [19]. Los ejes de este espacio están definidos, por lo tanto, como $L - M$ y $S - (L + M)$ para las coordenadas cromáticas, y $L + M$ para la coordenada acromática, también llamada luminosidad (ver figura 1.12). Moverse a lo largo de la coordenada $L - M$ significa explorar los colores que excitan a los conos L y M de manera tal que dejan constante la excitación de los conos S y la luminosidad $L + M$. De manera equivalente, moverse a lo largo del eje $S - (L + M)$, implica excitar a los conos S dejando constante la excitación de los conos L y M . Por último, moverse a lo largo del eje $L + M$, implica explorar los grises, dejando constante la excitación de los conos S , así como también la sustracción $L - M$.

En el experimento realizado por Krauskopf y Gegenfurtner (1992) [24], ellos usaron una pantalla de computadora en lugar de haces de luz como en el caso de MacAdam, y midieron umbrales de detección cromática en ese régimen. Los experimentadores les mostraban a los sujetos una pantalla plenamente coloreada con el color a testear y un círculo con un color vecino localizado en una de las cuatro esquinas de la pantalla (superior izquierda, superior derecha, inferior izquierda, o inferior derecha). Los sujetos debían fijar la mirada en una cruz central y reportar la posición del círculo. Para determinar el umbral de detección, usaron un procedimiento de escalera, una vez que el sujeto notaba la diferencia entre el color del círculo y el color del fondo (respondía correctamente), los experimentadores disminuían esa diferencia en el próximo estímulo circular. Por el contrario, si el sujeto respondía incorrectamente, se incrementaba la diferencia. Para cada color testeado, reportaron los umbrales de detección a lo largo de los ejes cromáticos del espacio DKL ($L - M$ y $S - (L + M)$) y en las dos direcciones que resultan de una rotación a 45° de esos ejes. Los resultados se pueden ver en la figura 1.14.

Para comparar nuestra predicción del error al discriminar con los resultados de Krauskopf y Gegenfurtner necesitamos transformar el espacio natural $\vec{\alpha}$ en el espacio DKL con el procedimiento que explicamos en la sección 2.2.2. Por comodidad, redefinimos a las coordenadas del espacio cromático DKL como

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= L - M, \\ \gamma_2 &= S - (L + M), \\ \gamma_3 &= L + M.\end{aligned}$$

Partimos del tensor métrico en las coordenadas $\vec{\alpha}$ presentado en la ecuación 5.3, y queremos obtener la matriz de Fisher en el espacio DKL. Queremos calcular, entonces,

$$J'(\vec{\gamma}) = C^t J(\vec{\alpha}) C.$$

La relación entre ambas matrices está dada por la matriz jacobiana C que calculamos a partir del cambio de variables (ver la expresión 2.16). Y por lo tanto,

$$J'(\vec{\gamma}) = \begin{pmatrix} \frac{\beta_M}{2(\gamma_3 - \gamma_1)} + \frac{\beta_L}{2(\gamma_3 + \gamma_1)} & 0 & -\frac{\beta_M}{2(\gamma_3 - \gamma_1)} + \frac{\beta_L}{2(\gamma_3 + \gamma_1)} \\ 0 & \frac{\beta_S}{\gamma_2 + \gamma_3} & \frac{\beta_S}{\gamma_2 + \gamma_3} \\ \frac{\beta_M}{2(\gamma_3 - \gamma_1)} + \frac{\beta_L}{2(\gamma_3 + \gamma_1)} & \frac{\beta_S}{\gamma_2 + \gamma_3} & \frac{\beta_M}{2(\gamma_3 - \gamma_1)} + \frac{\beta_L}{2(\gamma_3 + \gamma_1)} + \frac{\beta_S}{\gamma_2 + \gamma_3} \end{pmatrix}.$$

Como queremos comparar nuestros resultados con los medidos experimentalmente en el plano de luminosidad constante ($L + M = \gamma_3 = cte$), sólo nos interesa la submatriz de 2×2 correspondiente a las coordenadas γ_1 y γ_2 , es decir,

$$J'(\gamma_1, \gamma_2) = \begin{pmatrix} \frac{\beta_M}{2(\gamma_3 - \gamma_1)} + \frac{\beta_L}{2(\gamma_3 + \gamma_1)} & 0 \\ 0 & \frac{\beta_S}{\gamma_2 + \gamma_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\beta_M}{2M} + \frac{\beta_L}{2L} & 0 \\ 0 & \frac{\beta_S}{S} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz es diagonal, por lo tanto, nuestra teoría predice que en el espacio cromático DKL las elipses de discriminación están alineadas con los ejes coordenados, tal como se muestra en el trabajo de Krauskopf y Gegenfurtner. También se puede observar que la elongación de las elipses a lo largo del eje $L - M = \gamma_1$ depende únicamente de la excitación de los conos M y L , mientras que la elongación de las elipses en la dirección $S - (L + M) = \gamma_2$ depende exclusivamente de la excitación de los conos S . Por otra parte, tomando los valores $\beta_M = \beta_L$ como propusimos en los resultados anteriores (ver figuras 5.1 y 5.5 (b)), el umbral de detección a lo largo del eje $L - M = \gamma_1$ es simétrico para esa coordenada, y el umbral de detección a lo largo del eje $S - (L + M) = \gamma_2$ lo es para la coordenada S .

El hecho de que las elipses de discriminación tengan sus ejes alineados con los ejes coordenados del espacio cromático DKL hace pensar que este espacio representa mejor la percepción cromática que el espacio CIE 1931 xy donde las elipses no tienen una orientación preferencial. Cabe aclarar que los ejes del espacio DKL representan la oponencia de color presente en el campo receptivo de las neuronas de las siguientes etapas del procesamiento visual, mientras que para la deducción de las elipses de discriminación sólo tuvimos en cuenta la etapa de los fotorreceptores.

5.3. Conclusión

El objetivo del trabajo relatado en este capítulo estuvo centrado en desarrollar un formalismo que nos permita derivar una métrica en el espacio de color a partir de un modelo de representación de color en el cerebro. Dada una métrica en el espacio de color, las elipses de discriminación mínima están definidas como puntos en el espacio de color que están a una distancia fija de un determinado color. A pesar de haber despreciado desde la variación de voltaje en los segmentos internos de los fotorreceptores, hasta las etapas de procesamiento de color posteriores a la de absorción de fotones, las distancias derivadas a partir de la información de Fisher reproducen una gran fracción de la variabilidad experimental. Por otra parte, nosotras sólo podemos garantizar que las elipses derivadas son comparables con las medidas en el experimento de discriminación cuando la cota de Cramér-Rao es estrecha, es decir, cuando las etapas posteriores de procesamiento transmiten la información de manera óptima, o por lo menos, no introducen distorsiones adicionales que dependan del color. A priori, no tenemos una razón para creer que sea así. Sin embargo, el grado de similitud entre los resultados teóricos y los experimentales sugiere que la absorción de fotones constituye una etapa crucial en la habilidad de discriminar el color.

Capítulo 6

Espacio perceptualmente uniforme



Cuando abrimos los ojos, la mayoría de las personas vemos el mundo en colores. Las sensaciones cromáticas que experimentamos dependen de muchos factores. En esta sección discutimos el rol de cada uno de esos factores. Desde un punto de vista físico, la densidad de potencia espectral de la luz que ingresa a través de nuestras pupilas vive en un espacio de dimensión infinita. Sin embargo, somos inconscientes de la mayoría de estas dimensiones y sólo percibimos un subespacio de tres dimensiones cromáticas. El acto de observar, por lo tanto, es matemáticamente equivalente a proyectar el espacio de todo el espectro de luz sobre un subespacio tridimensional [42]. Los experimentos clásicos de color-matching [11] relatados en la sección 1.7 nos permiten identificar el subespacio que percibe un observador en particular.

6.1. Espacios casi perceptualmente uniformes

La mayoría de los intentos previos de construir espacios de color tridimensionales han ido en una dirección de representaciones universales, es decir, representaciones que no se ajustan a un sujeto en particular, sino a un sujeto ideal, un “observador estándar tricromático”. El sistema de color creado por Munsell en 1910 contiene tres ejes ortogonales: hue, luminosidad, y saturación [43, 44] (ver figura 1.8). El espacio de color CIE 1931 XYZ (ver figura 1.10) creado por la Commission Internationale de l’Éclairage emerge naturalmente del promedio entre sujetos de los experimentos de color matching [11, 18]. Su reducción a un espacio bidimensional xy sólo mantiene el hue

y la saturación, descartando la tercera coordenada que se aproxima a la luminosidad aparente. En 1984, después del descubrimiento de las características oponentes del color en el núcleo geniculado lateral, Derrington et al. introdujeron el espacio DKL [19] (ver figura 1.12). Sus ejes representan la oponencia entre las salidas de los conos.

Todos estos espacios, a pesar de ser adecuados a la hora de representar alguna característica del estímulo cromático, tenían el inconveniente de ser perceptualmente inhomogéneos. Es decir, los observadores eran capaces de hacer discriminaciones muy finas entre colores vecinos en ciertas regiones del espacio, pero no en otras. La distancia euclídea entre dos colores vecinos, por lo tanto, no era representativa de su habilidad para discriminar. Entonces, se introdujeron nuevas representaciones del color con el objetivo de obtener un espacio que representara mejor la precisión observada en los experimentos de discriminación. Muchos intentos estuvieron definidos dentro de un marco que se llamó *uniform-chromaticity scale diagram*, todos definidos como transformaciones no lineales del espacio CIE 1931 XYZ . En 1944, MacAdam intentó alcanzar uniformidad perceptual proponiendo una transformación no lineal geodésica basada en datos experimentales [45]. Su propuesta fue adoptada por la CIE en 1960 como el espacio de color uniforme estándar (UCS), nombrado como diagrama CIE 1960 UCS, con coordenadas Luv [11]. En 1976, la CIE aplicó dos modificaciones a este diagrama. Primero, realizó una transformación de coordenadas $Luv \rightarrow L'u'v'$ y definió el diagrama CIE 1976 UCS. Después de otras modificaciones, agregó una transformación adicional que dio lugar al espacio CIE Luv, con coordenadas $L^*u^*v^*$ [11] (ver panel izquierdo de la figura 1.11). En un espacio perceptualmente uniforme, el experimento de discriminación cromática detallado en el capítulo 5 daría como resultado círculos de igual diámetro en todos los puntos del espacio, ya que allí, dos colores que están separados a una distancia de una determinada longitud entre sí, se discriminan con la misma precisión que otro par de colores separados por una distancia de la misma longitud. Las elipses de discriminación cromática medidas por MacAdam (ver panel (b) de la figura 1.13) se proyectaron en el espacio CIE Luv, y tal como se puede ver en la figura 6.1 ni son círculos, ni tienen igual tamaño, por ende, este espacio no es perceptualmente uniforme.

También en 1976, la CIE definió un nuevo espacio llamado CIE Lab (ver panel derecho de la figura 1.11) que intentó ser aproximadamente uniforme perceptualmente y representar oponencia de color [18]. En la figura 6.2 se puede ver la proyección de las elipses medidas por MacAdam sobre este espacio, y observar que tampoco son círculos ni tienen igual tamaño y que, por lo tanto, este espacio tampoco es perceptualmente uniforme.

Cada una de estas alternativas tuvo sus ventajas y sus desventajas. Sin embargo, ninguna de ellas estuvo adaptada para el observador individual. Más aún, ninguna de ellas es verdaderamente perceptualmente uniforme para un tricrómata estándar.

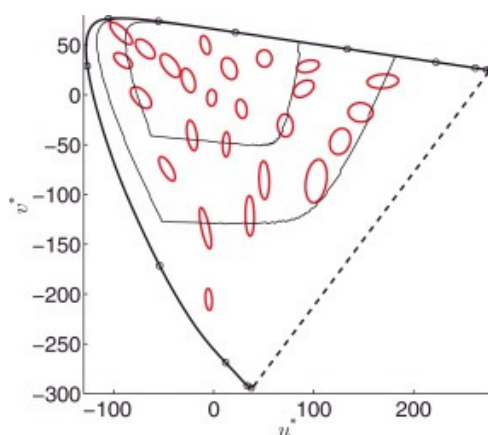


Figura 6.1: Elipses medidas por MacAdam y proyectadas sobre el espacio cromático CIE Luv Imagen extraída de [46]

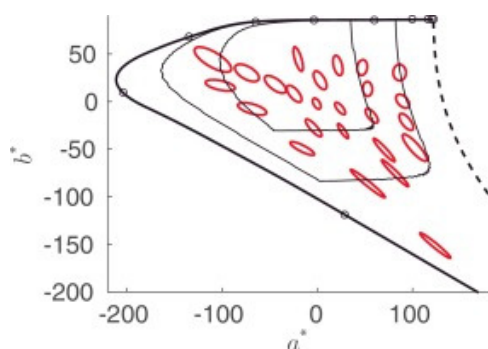


Figura 6.2: Elipses medidas por MacAdam y proyectadas sobre el espacio cromático CIE Lab Imagen extraída de [46]

6.2. Receta para obtener un espacio perceptualmente uniforme

Nuestro objetivo es construir un espacio que sea perceptualmente uniforme, es decir, un espacio en el que colores que se discriminan con igual precisión estén representados por puntos localizados a distancias iguales. Para realizar esta tarea necesitamos construir dos nociones de distancia: (1) una noción de distancia perceptual entre colores, basada en la habilidad para la discriminación de cada observador, y (2) una noción matemática de distancia en el espacio que representa el color. Nosotras buscamos un espacio perceptualmente uniforme que exponga las diferencias entre colores de una manera intuitiva, entonces tomamos la noción matemática de distancia del punto (2) como la distancia euclídea usual. Si empezamos representando al color a través de cualquiera de los sistemas de coordenadas ya conocidos, vamos a dar lugar a la noción de distancia (1) que muy probablemente no va a coincidir con la noción euclídea de distancia (2). Por lo tanto, el segundo paso consiste en definir un cambio de coordenadas desde el sistema de coordenadas original hacia un nuevo espacio de color, que mapee la noción de distancia (1) en la distancia euclídea.

La noción (1) debe estar basada en experimentos perceptuales, y es de esperar que varíe de un observador a otro. Muchos de esos experimentos se realizaron usando distintos paradigmas con el fin de evaluar la discriminación cromática [21–23, 47]. Todos esos paradigmas están basados en el hecho de que la agudeza visual tiene una precisión finita y, por lo tanto si dos colores están lo suficientemente cerca uno del otro, un observador no va a ser capaz de percibirlos como diferentes. Por ende, los experimentos apuntaron a determinar el conjunto de colores que *no* se puede discriminar respecto de otro color dado. La superficie definida como el borde exterior de esa región contiene el conjunto de colores más cercanos que pueden ser distinguidos como diferentes al color del centro. Construir una noción de distancia usando el criterio (1) se reduce a notar que, desde el punto de vista perceptual, tiene sentido considerar que los colores de esa superficie deben estar a la misma distancia del punto central. Sin embargo, los experimentos muestran siempre que estas superficies son elipsoides y que, por lo tanto, hay una métrica subyacente. En otras palabras, la noción de distancia que emerge de los experimentos de discriminación se puede obtener como la norma del producto escalar definido en el espacio de color. Entonces, necesitamos construir un tensor de 2^{do} rango para cada observador que defina el producto escalar. Los autovectores del tensor evaluado en cada punto corresponden a las direcciones de los ejes principales de las elipses medidas, y los autovalores asociados determinan sus longitudes. En este marco, la receta a seguir para obtener la noción (1) de distancia requerida arriba es:

1. Realizar un experimento de discriminación sobre un conjunto finito de puntos \vec{x} distribuidos sobre el espacio de color y determinar, para cada \vec{x} , el elipsoide que contiene los colores que no pueden ser discriminados del punto \vec{x} .
2. Calcular las direcciones y las longitudes de los ejes principales de todos los elipsoides medidas.
3. En cada punto \vec{x} del espacio de color, definir un tensor métrico $J(\vec{x})$ como la matriz de 3×3 cuyos autovectores y autovalores coincidan con las direcciones y las longitudes calculadas en 2.
4. Definir una noción de distancia entre dos colores vecinos \vec{x} y $\vec{x} + d\vec{x}$ como $\text{dist} = \sqrt{d\vec{x}^t J(\vec{x}) d\vec{x}}$, donde el supraíndice t indica vector traspuesto.
5. Definir una distancia entre dos colores remotos \vec{x}_a y \vec{x}_b a lo largo de un camino que los conecta como la suma de las distancias diferenciales de los elementos de línea a lo largo de ese camino.

Para obtener un espacio perceptualmente uniforme, necesitamos encontrar un cambio de coordenadas $\vec{x}' = \mathbf{F}(\vec{x})$ que transforma el tensor métrico $J(\vec{x})$ en la matriz identidad, es decir, $J'(\vec{x}') = \mathbb{1}$. Cuando el producto escalar de un dado espacio

está representado por la matriz identidad, las distancias coinciden con nuestra noción intuitiva euclídea. Como resultado, en el espacio transformado, los elipsoides mínimos de discriminación se vuelven esferas, más aún, esferas del mismo tamaño. El tensor transformado $J'(\vec{x}')$ se obtiene a partir del tensor original $J(\vec{x})$ usando la relación $J'(\vec{x}') = C^t J(\vec{x}) C$, donde C es la matriz jacobiana, es decir, $C_{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j}$. El procedimiento para realizar esta transformación en el tensor de Fisher está descrito con mayor detalle en la sección 2.2.

6.3. Espacio perceptualmente uniforme a partir del modelo descrito en el capítulo 3

En este trabajo, en lugar de coleccionar datos experimentales como planteamos en el paso 1 de la receta descrita en la sección 6.2, definimos la métrica perceptual usando el modelo analítico que desarrollamos en el capítulo 3. Nuestra teoría, desarrollada de primeros principios, está basada en la estadística de la absorción de fotones, y el tensor métrico que derivamos reproduce en gran medida los resultados experimentales de observadores con retinas de composición diferente. En esta sección utilizamos el mismo tensor métrico, ya que (a) nos permite describir observadores con retinas de composiciones arbitrarias, y (b) probamos que reproduce gran parte de los datos experimentales coleccionados para distintos observadores [30, 31].

En este marco, las coordenadas naturales que describen el color con que percibimos un espectro de luz $I(\lambda)$ son α_S, α_M y α_L , definidas en 3.13. Es decir, las coordenadas naturales se definen como el producto escalar entre el espectro de luz incidente y las curvas de absorción de los fotorreceptores pesadas por los coeficientes β_i que representan la proporción de conos de tipo i presentes en la retina del observador. Cabe destacar que el mismo espectro puede tener coordenadas $\alpha_S, \alpha_M, \alpha_L$ diferentes para observadores con retinas de distinta composición.

El tensor métrico que derivamos en la sección anterior es

$$J(\alpha_S, \alpha_M, \alpha_L) = \begin{pmatrix} 1/\alpha_S & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha_M & 0 \\ 0 & 0 & 1/\alpha_L \end{pmatrix}.$$

El formalismo matemático a partir del cual este tensor emerge nos garantiza que la distancia entre dos colores vecinos cualesquiera está relacionada, por construcción, con el error de discriminación perceptual de un observador ideal que fija la cota de Cramér Rao [32]. En un principio, un sujeto real no necesita ser un observador ideal, sin embargo, la teoría explica el 87 % de la variabilidad experimental de observadores reales, implicando que la percepción del color es cercana a la óptima [30].

Buscar un espacio perceptualmente uniforme, por lo tanto, se reduce a encontrar la transformación de coordenadas $\vec{x}' = \vec{F}(\vec{\alpha})$ que resuelve la ecuación

$$\mathbb{1} = C^t J(\vec{\alpha}) C.$$

La solución a este sistema es

$$x'_i = 2\sqrt{\alpha_i} + \mu_i,$$

donde los μ_i son constantes arbitrarias de integración que aquí las tomamos iguales a cero con el fin de que la oscuridad esté representada por el punto $\vec{x}' = (0, 0, 0)$. En la figura 6.3, mostramos distintas superficies de luminosidad constante, donde la

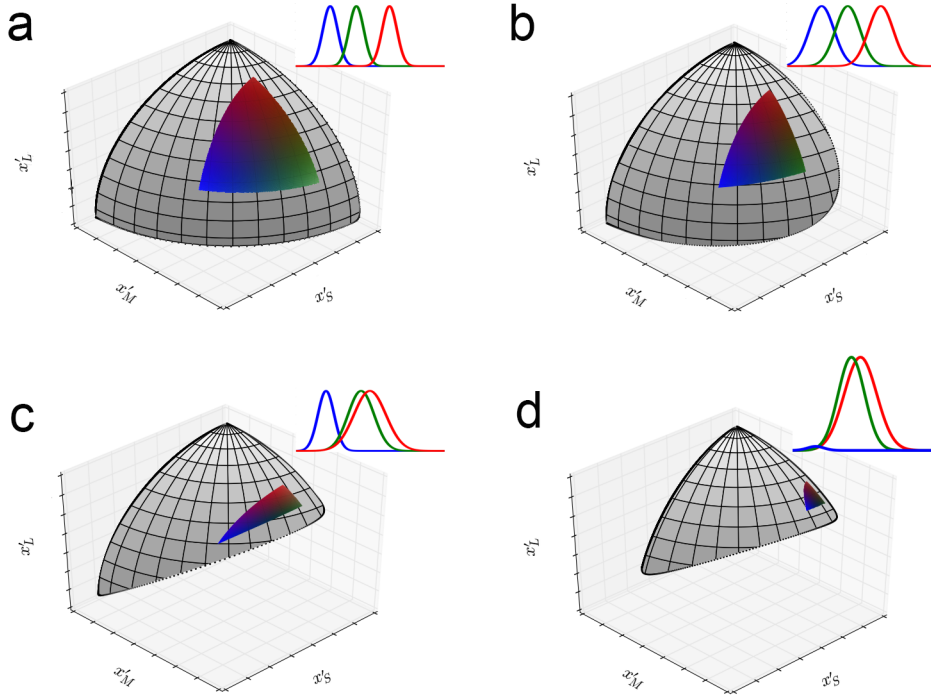


Figura 6.3: Espacio perceptualmente uniforme. Superficie definida como $\alpha_S + \alpha_M + \alpha_L = (x'_S)^2 + (x'_M)^2 + (x'_L)^2 = \text{const.}$ La región triangular coloreada representa la porción de la superficie que se puede representar por monitores LED. Las curvas $h_i(\lambda)$ están ajustadas como $e^{-(\lambda - \lambda_i)^2 / \sigma_i^2}$. Recuadro: curvas de absorción, con alto total proporcional a la fracción β_i de conos de cada tipo. a: Observadores con probabilidades de absorción similares a las reportadas por un pez de aguas bajas [48], con $\lambda_S = 455$ nm, $\lambda_M = 530$ nm, $\lambda_L = 625$ nm, y $\sigma_i = 30$ nm, para todo i . $\beta_S = \beta_M = \beta_L = 1/3$. b: Igual que en a, pero con anchos $\sigma_i = 50$ nm. c: Observador con probabilidades de absorción de un humano tricrómatas estándar [9], con $\lambda_S = 442$ nm, $\lambda_M = 543$ nm, $\lambda_L = 568$ nm, $\sigma_S = 32,96$ nm, $\sigma_M = 52,8$ nm, $\sigma_L = 64,76$ nm, y $\beta_S = \beta_M = \beta_L = 1/3$. d: Igual que en c, pero con una composición de la retina más realista: $\beta_S = 0,02$, $\beta_M = \beta_L = 0,49$.

luminosidad se definió como $\alpha_S + \alpha_M + \alpha_L = (x'_S)^2 + (x'_M)^2 + (x'_L)^2 = \text{const.}$ A medida que aumentamos el valor de esta constante, la superficie esférica se mueve hacia afuera, y los colores se perciben más brillantes. La superficie está incluida en el octante donde todos los x'_i son no negativos.

Sólo una limitada porción de cada superficie aparece pintada, ya que no todos los

colores percibidos se pueden mostrar con un monitor estándar. Los colores más saturados deberían aparecer en las regiones mostradas en gris, pero estos no pueden generarse con mezclas de los espectros emitidos por los LEDs del monitor. Esta limitación de las pantallas de computadoras explica por qué los colores de las escenas suelen parecer más vívidas cuando se ven de manera natural, y por qué el arte de los museos virtuales no tiene la intensidad cromática de los museos reales. Para colorear las superficies, debemos activar cada uno de los tres LEDs con una intensidad tal que produce, para cada observador, un espectro cuyas coordenadas \vec{x}' coinciden con la ubicación del punto. Los diferentes paneles corresponden a observadores que tienen retinas fisiológicamente distintas y que a su vez tienen una composición distinta. En los cuatro paneles, dos de los tres bordes exteriores de cada superficie corresponde a los colores del arco iris, los que están saturados al máximo. El tercer borde corresponde al conjunto de los púrpuras (la transición desde el rojo al azul), que a pesar de no formar parte del arco iris está saturado al máximo.

En la figura 6.3 (a), vemos el espacio perceptualmente uniforme para un pez de aguas bajas cuya retina tiene tres tipos de conos [48]. Con un fin ilustrativo, escaleamos el ancho de las curvas de absorción de manera tal que las curvas $h_i(\lambda)$ resultantes se solaparan mínimamente entre sí. Las curvas de absorción que no se superponen se pueden activar de manera independiente, lo que da como resultado colores de hue más intenso. Para estos observadores, el espacio accesible casi coincide con todo el octante positivo del espacio \vec{x}' . Las esquinas del espacio corresponden a haces de luz monocromática que activan un sólo tipo de cono, y el resto de los puntos surgen de luces que activan conos de dos o tres tipos.

En la figura 6.3 (b), analizamos a un observador hipotético con curvas de absorción que tienen picos en los mismos valores que las del observador (a), pero que son más anchas, y por lo tanto se solapan entre sí. Entonces, la actividad de los diferentes tipos de conos tiende a correlacionarse. Como una consecuencia natural, el espacio accesible se achica, y el borde exterior se vuelve más redondeado. En particular, ahora no es posible activar a un cono M sin activar simultáneamente al menos a alguno de los otros tipos de conos. No existe ningún espectro que active exclusivamente a los conos M y, por lo tanto, la región del espacio correspondiente a valores grandes de x'_M ya no se pueden alcanzar.

Cuando comparamos las figuras 6.3 (a) y (b), vemos que el tamaño de la región coloreada disminuye. Como el espacio es perceptualmente uniforme, una reducción en el triángulo central implica que los colores que pueden ser generados a partir de una pantalla de computadora son percibidos como más similares entre sí, y al mismo tiempo, más diferentes a los colores máximamente saturados del borde exterior. La correlación en la actividad de los conos produce que los colores de las pantallas se perciban con menos saturación, es decir, más grises, o blancos. Por lo tanto, es más

difícil diferenciarlos entre sí. Como consecuencia, la región triangular central se achica. Además, los espectros de luz que producen percepciones máximamente saturadas tienen propiedades más extremas en (b) que las que producen el mismo efecto en (a). Para que el observador (b) pueda percibir colores saturados al máximo se requieren haces de luz monocromática que se muevan más allá del ultravioleta o del infrarrojo, para evitar la activación simultánea de los tres tipos de fotorreceptores. En suma, la intensidad de la fuente de luz debe aumentar enormemente para poder compensar el decaimiento de las curvas de absorción hacia los extremos del espectro visible. Por lo tanto, los espectros que se encuentran en el plano de coordenadas del panel (b) contienen longitudes de onda e intensidades más extremas que los del panel (a). Entonces, es natural que estos espectros estén ubicados más lejos que aquellos que se pueden producir por la pantalla de la computadora.

En la figura 6.3 (c), analizamos el caso tricrómata humano con curvas de absorción como las que se muestran en ese panel. La diferencia más importante con el caso del pez de aguas bajas es que la probabilidad de las longitudes de onda larga está desplazada hacia la de longitudes de onda más cortas, superponiéndose a la curva de longitudes de onda medianas mucho más que antes. La fuerte correlación entre los conos M y L achica más aún el espacio accesible, casi restringiéndolo a la región $x'_L \geq x'_M$. En el panel (d), vemos el espacio perceptualmente uniforme para un humano que tiene una mayor proporción de conos M y L que de conos S , como suele suceder en la naturaleza.

Si variamos la longitud de onda λ de un haz monocromático en pasos de $d\lambda$ constantes, desde el punto de vista perceptual, los colores que obtenemos *no* son equidistantes, lo que trae como consecuencia que la separación de puntos del borde exterior de las superficies de las figuras 6.3 (a)-(d) no sea constante. Es decir, a veces un incremento en $d\lambda$ resulta en un color que se puede discriminar claramente del anterior, y a veces no. La variación de la longitud de onda en intervalos uniformes significa transitar un camino a lo largo del espacio perceptualmente uniforme a una velocidad que no es constante. A la inversa, podemos imaginar que atravesamos el mismo camino a velocidad constante, y construir una nueva paleta a partir de los colores que encontramos a lo largo de nuestro viaje por el espacio perceptualmente uniforme. En la figura 6.4, comparamos las escalas obtenidas para un pez de aguas bajas (barra central) y para un humano (barra de abajo), junto con la escala de longitud de onda original (barra de arriba).

Observamos que, para el observador humano, la escala perceptualmente uniforme se expande en las zonas correspondientes al cian y al naranja, y se contrae en las bandas azul y roja. Las regiones expandidas resultan de la alta sensibilidad a las variaciones en el número de conos activados en las regiones donde las curvas S y M se superponen, o donde las curvas M y L se superponen. Precisamente en estas zonas, las pendientes de activación de las curvas son máximas. Por el contrario, la paleta humana está contraída,

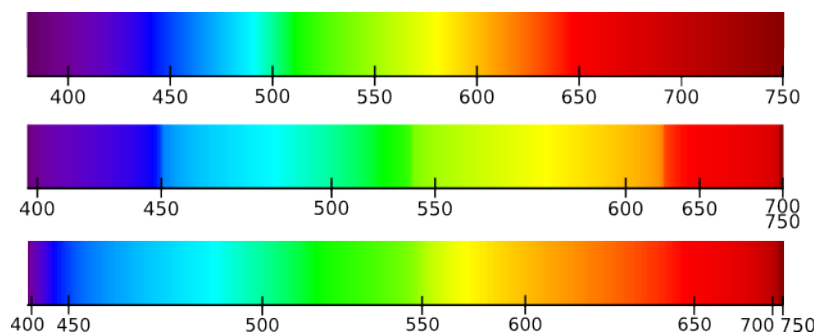


Figura 6.4: Comparación entre diferentes escalas de luz monocromática. Los colores se muestran sólo con fines orientativos. No representan las verdaderas sensaciones inducidas por los haces monocromáticos, ya que los monitores LED y las impresiones no pueden producir colores saturados. Arriba: paleta de colores que varía linealmente con la longitud de onda. El mapeo de los valores RGB de la pantalla a una dimensión que emula la longitud de onda fue extraído de [49]. Centro: paleta de colores perceptualmente uniforme para el pez de aguas bajas de la figura 6.3 (a). Abajo: paleta de colores perceptualmente uniforme para el humano de la figura 6.3 (d).

implicando una pérdida de sensibilidad alrededor de los máximos de las curvas de absorción S , M y L .

El tensor métrico del espacio perceptualmente uniforme está representado por la matriz identidad y, por lo tanto, la curvatura vale cero en todos los puntos. En 1943, Silberstein demostró que la curvatura del espacio cromático CIE 1931 xy era significativamente distinta de cero [50]. Como la curvatura es un invariante, su resultado implica que no existe un cambio de coordenadas, sea lineal o no lineal, que pueda transformar el espacio xy en otro espacio perceptualmente uniforme. Esta conclusión desalentó a otros investigadores en la búsqueda de espacios que sean rigurosamente perceptualmente uniformes, y derivó en esfuerzos hacia aproximaciones pragmáticas. En efecto, se conformaron con encontrar aproximaciones a un espacio perceptualmente uniforme. Sin embargo, Silberstein sacó esta conclusión sobre el espacio CIE xy que es bidimensional. Si interpretamos ese espacio como una subvariedad de un espacio de dimensión más alta, nada impide que el espacio más grande tenga una verdadera uniformidad perceptual y que, al mismo tiempo, esa subvariedad sea curva. El espacio perceptualmente uniforme que introducimos en esta sección es tridimensional y contiene diferentes copias del espacio CIE xy como subvariedades curvadas, una copia para cada nivel de luminosidad posible. Actualmente, estamos trabajando en colaboración con el Dr. Sebastián Risau y con el Mgter. Nicolás Vattuone con el fin de hacer una comparación de curvaturas entre los distintos espacios de color. Uno de los principales objetivos es rehacer los cálculos de curvatura de Silberstein utilizando métodos más actuales y compararlos con los hallados para el espacio perceptualmente uniforme que mostramos en este capítulo.

Los colores pueden ser descriptos para observadores cuyas retinas tienen composiciones diferentes, ya sea porque tienen más o menos que tres tipos de conos, o porque sus conos presentan otras curvas de absorción. Esta dependencia con el observador que

permite crear un espacio de color personalizado no fue tomada en cuenta en muchos estudios colorimétricos, donde los espacios de color se diseñaron para un observador promedio. Nuestro espacio, sin embargo, no es el primero que se adapta a las individualidades de cada observador. Los estudios que se hicieron en esta dirección, sin embargo, apuntaron a un objetivo distinto al nuestro: su objetivo fue derivar el camino por el cual el sistema nervioso puede codificar internamente los estímulos con el fin de operar con representaciones óptimas, ya sea en términos del error cuadrático mínimo promedio [51–53], o de máxima transferencia de información entre la señal externa y la actividad neuronal [54, 55]. En otras palabras, ellos elaboraron las consecuencias computacionales de una hipótesis de optimización. Su nuevo espacio de estímulos se obtiene aplicando una transformación no lineal entrada-salida a las coordenadas que definen la señal externa, y la no linealidad fue elegida teniendo en cuenta que la distribución de probabilidad con que aparecen los distintos estímulos en la naturaleza [56–59] y el ruido que es inherente a la actividad neuronal [51–55]. Como resultado, ellos obtienen un estímulo uniformemente discriminable al nivel de la salida, es decir, que tiene el mismo espíritu que la teoría que derivamos acá.

La diferencia entre nuestro análisis y los estudios previos es que nuestra teoría está enraizada en (a) la primera etapa del procesamiento visual, es decir, la absorción de fotones únicamente, y (b) la geometría de Fisher derivada a partir de la fisiología de los fotorreceptores, es decir, sin hacer referencia a la estadística de los estímulos naturales. El punto (a) se puede ver como una buena y como mala noticia. La buena noticia es que sólo la primera etapa de procesamiento visual puede explicar una gran parte del comportamiento de la varianza de los datos de discriminación de color [30]. Más aún, la simplicidad del modelo de ruido nos permite derivar analíticamente un espacio de color perceptualmente uniforme. La mala noticia es que el modelo desprecia el resto de las etapas posteriores del procesamiento visual, como por ejemplo, adaptación dependiente del contexto de las respuestas neuronales, descomposición en canales oponentes acromáticos y cromáticos, y saturación no lineal de las señales celulares [51, 54, 55, 60, 61]. Sin embargo, en el punto (b) ofrecemos un método riguroso y sistemático que se puede aplicar a otros modelos de ruido con más detalle biológico, como por ejemplo en el contexto de texturas [62]. Esperamos que esta metodología sea inspiradora para nuevos estudios que incluyan otras características relevantes de la imagen, como estructura espacial, y textura, así como también otros cálculos realizados a lo largo del camino visual.

6.4. Conclusión

En este capítulo introducimos un espacio perceptualmente uniforme, ilustrado en las figuras 6.3 y 6.4 para distintos observadores, donde los colores están representados

de manera tal que la distancia euclídea entre pares de colores coincide con la distancia perceptual. Nuestra construcción descansa sobre la suposición de que la métrica de Fisher es adecuada para describir las distancias perceptuales. Esta métrica tiene la ventaja de estar derivada a partir de las propiedades de la absorción de fotones, y de establecer una conexión rigurosa con el desempeño de los observadores ideales en las tareas de discriminación, además de explicar el 87% de la varianza de los datos experimentales obtenidos a través de pruebas comportamentales. Los intentos anteriores de espacios perceptualmente uniforme no lograron alcanzar completa uniformidad perceptual, ya que están basados en decisiones heurísticas. Nosotras introducimos un método analítico que nos permite deducir el espacio perceptualmente uniforme para distintos observadores.

Capítulo 7

Funciones de color matching

“El color representa la frontera exacta entre lo perspicuo y la materia”

— Federico Andahazi

La idea de igualar un determinado color con la suma de otros colores lleva un nombre de difícil traducción: *color matching* y data del siglo *XIX*. Hoy en día, sabemos que la componente espectral de la luz que incide sobre el ojo está filtrada por los fotorreceptores sensibles al color presentes en la retina, es decir, por los conos *S*, *M* y *L*. Sin embargo, décadas antes de conocer las curvas de absorción de los conos (ver figura 1.5), diversos experimentos perceptuales indicaban que cualquier color podía ser percibido como igual a una suma de tres colores llamados *colores primarios*. La propiedad fundamental de esos colores es que un ser humano tricrómatas puede reproducir cualquier color con una suma ponderada de ellos. Esos colores tienen una condición adicional y es que mezclando dos de ellos nunca se puede obtener el tercero. Bajo estas consideraciones, Maxwell diseñó un diagrama con forma triangular con los tres colores primarios en los vértices, y donde cualquier color se puede representar con un punto en el seno de ese triángulo [11]. Los colores primarios fueron elegidos como haces monocromáticos de colores rojo (R), verde (G) y azul (B), donde las abreviaciones se refieren a sus nombres en inglés.

7.1. Introducción

En 1931, la Commission Internationale de l’Éclairage (CIE) reportó los resultados para la colección de los experimentos de color matching donde se les pedía a sujetos humanos que matcheen colores espectrales con una suma ponderada de colores primarios. Los sujetos que realizaron la tarea tenían que reproducir cada color espectral con la suma de tres colores primarios, fijos a lo largo del experimento. El experimentador

les mostraba un campo bipartito sobre una pantalla (la región subtendía un ángulo visual de 2 deg), la mitad del campo estaba iluminada con un haz monocromático puro como color objetivo, y la otra mitad estaba iluminada con el resultado de la suma de una cierta cantidad de potencia para tres luces primarias elegidas como los haces monocromáticos con picos en $R = 700\text{ nm}$, $G = 546,1\text{ nm}$ y $B = 435,8\text{ nm}$. Los sujetos humanos eran libres de modificar la ganancia de los colores primarios con el objetivo de matchear el resultado con el color objetivo. La CIE colectó los datos experimentales provenientes de 18 sujetos y reportó el resultado promedio con el nombre de *funciones de color matching* del observador estándar [11, 18]. Cada función reportada corresponde a la respuesta promedio de los sujetos en la intensidad para cada luz primaria y se las llamó: $r(\lambda)$ o curva roja, $g(\lambda)$ o curva verde y $b(\lambda)$ o curva azul (ver figura 7.1).

El objetivo del trabajo descrito en este capítulo fue predecir el resultado del experimento de color matching usando el modelo descrito en la sección 3. Primero, derivamos una metodología que nos permite demostrar la predicción de las funciones de color matching (FCM) y derivar los errores para esas FCM. En segundo lugar, notamos que las FCM originales son casi ortogonales entre sí. Esta característica es consecuencia de los colores primarios elegidos, y utilizando nuestro modelo, deducimos el conjunto de colores primarios que dan lugar a las FCM máximamente ortogonales, más ortogonales aún que las utilizadas originalmente. Y por último, predecimos los colores primarios que mostrarían FCM siempre positivas.

El trabajo que presentamos en este capítulo estima el resultado del experimento de color matching a partir de nuestro modelo que, como vimos en los dos capítulos anteriores, también predice la habilidad en la discriminación cromática en humanos. La teoría fue desarrollada de primeros principios, basada en la estadística de absorción de fotones por los conos presentes en la retina, y el tensor métrico que derivamos reproduce buena parte de los experimentos de discriminación realizados sobre observadores con retinas de distinta composición. En esta sección empleamos el modelo de ruido introducido en el capítulo 3 para comparar analíticamente el proceso que tiene lugar en la retina cuando los sujetos tienen que matchear dos campos iluminados por luces con diferente composición espectral.

7.2. Predicción de las color matching functions originales

Si un haz de luz con intensidad Poissonniana y composición espectral $I(\lambda)$ ilumina la retina, entonces la probabilidad de que los tres tipos de conos (S , M , L) absorban

K_S , K_M y K_L de esos fotones es el producto de distribuciones poissonianas:

$$P(\vec{K}|I(\vec{\lambda})) = \prod_{l \in S, M, L} \text{Poisson}(K_l|\alpha_l), \quad (7.1)$$

donde

$$\alpha_l = \beta_l \int_0^\infty I(\lambda) q_l(\lambda) d\lambda,$$

introducidas ya en 2.12, β_l es la proporción de los conos l en la retina del observador, y $q_l(\lambda)$ es la curva de absorción introducida por Stockman [9] (ver figura 1.5). A lo largo del experimento, el color objetivo es un color espectral monocromático puro con una distribución de potencia:

$$I_a(\lambda) = I_0 \delta(\lambda - \lambda_0),$$

donde I_0 corresponde a una ganancia constante, y λ_0 a la longitud de onda correspondiente al color. Los sujetos matchean el color objetivo con la suma de tres colores primarios que tiene una distribución de potencia:

$$I_b(\lambda) = F_1 \delta(\lambda - \lambda_1) + F_2 \delta(\lambda - \lambda_2) + F_3 \delta(\lambda - \lambda_3),$$

donde F_i es la intensidad de los estímulos de las luces primarias i caracterizadas por las longitudes de onda λ_i . Nosotras estimamos la respuesta de los sujetos (los valores de F_i) prediciendo la respuesta óptima de sus fotorreceptores. Cuando los conos ven el color objetivo, existe cierta estocasticidad en el proceso de absorción de fotones y este proceso está gobernado por la distribución de probabilidad de la expresión 7.1, donde $I(\lambda) = I_a(\lambda)$. Como demostramos en la sección 5, podemos calcular el error del estimador con el fin de predecir la habilidad con que un sujeto discrimina colores cercanos, y observamos que la predicción explica el 87% de los resultados experimentales. En ese trabajo, derivamos la matriz de información de Fisher que representa la métrica del espacio de color bajo este proceso. La matriz de información de Fisher es el objeto matemático a través del cual las distancias infinitesimales en el espacio de parámetros están heredadas a partir del efecto de las distribuciones de probabilidad expresadas en 7.1 [25]. A través de este modelo bien caracterizado, comparamos la distancia entre la distribución de probabilidad que gobierna el proceso de ver el color objetivo ($P(\vec{K}|I_a(\lambda))$), y el de ver el color matcheado ($P(\vec{K}|I_b(\lambda))$) como la divergencia de Kullback-Leibler (D_{KL}) [63]:

$$D_{KL}[P(\vec{K}|I_a(\lambda))|P(\vec{K}|I_b(\lambda))] = \sum_{l \in S, M, L} P(\vec{K}|I_a(\lambda)) \ln \left(\frac{P(\vec{K}|I_a(\lambda))}{P(\vec{K}|I_b(\lambda))} \right). \quad (7.2)$$

Teniendo en cuenta que el valor medio de K_l es α_l con $l = S, M, L$, es decir, con el color monocromático objetivo $\langle K_l \rangle = I_0 q_l(\lambda_0)$, con $q_l(\lambda)$ la curva de absorción del

cono l evaluada en λ_0 , la D_{KL} se convierte en:

$$D_{KL}[P(\vec{K}|I_a(\lambda))|P(\vec{K}|I_b(\lambda))] = \sum_{l \in S, M, L} \left(\sum_{i \in 1, 2, 3} F_i q_l(\lambda_i) \right) + I_0 q_l(\lambda_0) \left(\ln \frac{I_0 q_l(\lambda_0)}{\sum_{i \in 1, 2, 3} F_i q_l(\lambda_i)} - 1 \right). \quad (7.3)$$

Con el fin de explicar la situación de matcheo, buscamos los mínimos para la D_{KL} . La D_{KL} es siempre mayor o igual que cero, y se anula cuando las distribuciones de probabilidad son iguales. Entonces, en aquellos lugares donde se anula tiene un mínimo, y es fácil ver que la expresión 7.3 se cancela cuando

$$\sum_{i \in 1, 2, 3} F_i q_l(\lambda_i) = I_0 q_l(\lambda_0), \forall l \in S, M, L. \quad (7.4)$$

Esta puede no ser la única solución que minimiza la D_{KL} de 7.3, sin embargo, no tenemos interés en encontrar todos sus mínimos y, por lo tanto, exploramos la solución de la expresión 7.4 que es lineal en las respuestas F_i para cada λ_0 . Analizamos la solución para el caso en el que la intensidad $I_0 = 1$ por comodidad y, por lo tanto, la expresión 7.4 se reduce a:

$$\begin{bmatrix} q_S(\lambda_1) & q_S(\lambda_2) & q_S(\lambda_3) \\ q_M(\lambda_1) & q_M(\lambda_2) & q_M(\lambda_3) \\ q_L(\lambda_1) & q_L(\lambda_2) & q_L(\lambda_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_1(\lambda_0) \\ F_2(\lambda_0) \\ F_3(\lambda_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_S(\lambda_0) \\ q_M(\lambda_0) \\ q_L(\lambda_0) \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

Los colores primarios reportados por la CIE provenían de fuentes de luz monocromática de longitudes de onda $R = 700$ nm, $G = 546,1$ nm y $B = 435,8$ nm. En la figura 7.1 mostramos la versión normalizada de las FCM originales, normalizadas con la norma euclídea, junto con la predicción para los valores F_i con $i = B, G, R$ resultado del sistema de ecuaciones 7.5. Ambos conjuntos de curvas son muy similares cuantitativa y cualitativamente, lo que indica que a través de nuestro modelo podemos hacer una buena predicción de los resultados del experimento de color matching. La curva original de color matching para el color primario rojo presenta intensidades negativas en longitudes de onda alrededor de 500 nm. En esta región, los sujetos no pueden matchear esos colores con la suma de las luces verde y azul elegidas en el experimento, y por lo tanto fueron libres de sumar la luz roja al color objetivo. Nuestro análisis predice los valores negativos para la FCM roja en la misma región del espectro visible. Este resultado significa que para esos colores es necesario restar una cierta cantidad de color rojo al color de matcheo, y por lo tanto la decisión de sustraer la cantidad de rojo a la FCM roja que los sujetos en realidad suman al color objetivo es correcta.

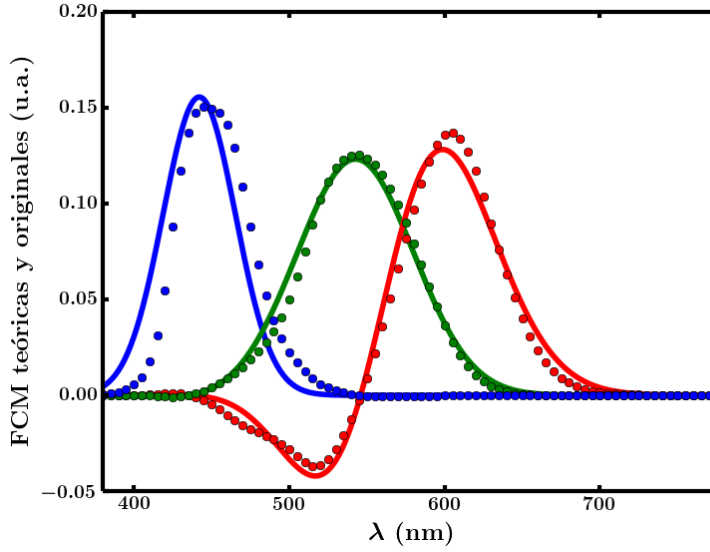


Figura 7.1: Funciones de color matching. Reportadas por la CIE normalizadas $r(\lambda)$ en puntos rojos, $g(\lambda)$ en puntos verdes, y $b(\lambda)$ en puntos azules (colores primarios con picos en $R = 700$ nm, $G = 546,1$ nm y $B = 435,8$ nm) y nuestras predicciones teóricas, también normalizadas, en línea sólida. Los datos experimentales fueron tomados de [15].

Cuando los sujetos realizan la tarea de color matching, son libres de elegir la intensidad de las tres luces primarias con el objetivo de matchear un haz de luz monocromática. El proceso de matcheo es el resultado de la suma de otros procesos que tienen lugar en el cerebro. En este trabajo predecimos el experimento de color matching a través de un modelo de ruido que describe la estadística de la absorción de fotones por los fotorreceptores, asumiendo que todas las etapas de procesamiento posteriores no introducen cambios que dependan del color, o en este caso de la longitud de onda. Dado ese modelo de ruido, también podemos predecir el error asociado a la tarea de color matching que no fue reportada en el experimento original. Para ello, necesitamos derivar la métrica perceptual en el espacio de color basado en las FCM del experimento. Nosotras definimos una métrica basada en la información de Fisher asociada al proceso de ver un color con una determinada composición espectral. Esta teoría nos permite derivar un tensor métrico que reproduce en gran medida los resultados de discriminación cromática en observadores con retinas de distinta composición, y nos permite además hacer transformaciones de un espacio de color en otro. Como mostramos antes, las coordenadas de color que mejor describen la naturaleza de este proceso son $\alpha_S, \alpha_M, \alpha_L$ y la matriz de Fisher en este sistema (introducida en 5.3) es

$$J(\alpha_S, \alpha_M, \alpha_L) = \begin{pmatrix} 1/\alpha_S & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha_M & 0 \\ 0 & 0 & 1/\alpha_L \end{pmatrix}.$$

Entonces, necesitamos transformar este tensor métrico en el espacio generado por las FCM a través del procedimiento relatado en la sección 2.2. Elegimos las $\vec{x} = (F_1, F_2, F_3)$ que resultan de la predicción del experimento de color matching,

$$J_{CMF}(\vec{x}) = C^t J(\vec{\alpha}) C,$$

donde C es la matriz jacobiana, es decir, $C_{ij} = \partial\alpha_i/\partial x_j$ y, por lo tanto, necesitamos la transformación de coordenadas entre $\vec{\alpha}$ y \vec{x} . Esta transformación es lineal y su forma más simple ya fue introducida en la expresión 7.5. Para una determinada longitud de onda λ_0 , los valores $\alpha_i(\lambda_0) = h_i(\lambda_0) = \beta_i q_i(\lambda_0)$, donde β_i son las proporciones de los conos de tipo i en la retina del observador y, por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} \alpha_S(\lambda_0) \\ \alpha_M(\lambda_0) \\ \alpha_L(\lambda_0) \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} F_1(\lambda_0) \\ F_2(\lambda_0) \\ F_3(\lambda_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_S(\lambda_1) & \alpha_S(\lambda_2) & \alpha_S(\lambda_3) \\ \alpha_M(\lambda_1) & \alpha_M(\lambda_2) & \alpha_M(\lambda_3) \\ \alpha_L(\lambda_1) & \alpha_L(\lambda_2) & \alpha_L(\lambda_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1(\lambda_0) \\ F_2(\lambda_0) \\ F_3(\lambda_0) \end{bmatrix}.$$

El tensor métrico resultante en el espacio de las FCM tiene componentes

$$J_{CMF}(\vec{x}(\vec{\alpha}))_{jt} = \sum_{i=S,M,L} \alpha_i(\lambda_j) q_i(\lambda_t) / q_i(\lambda_0) \quad (7.6)$$

para todo λ_0 en el espectro visible, donde las coordenadas \vec{x} están expresadas como una función de las coordenadas de color $\vec{\alpha}$. Durante el experimento de color matching, el sujeto debe matchear una longitud de onda pura con una suma pesada de colores primarios y, en este proceso, existe cierta variabilidad en sus respuestas cuando el sujeto debe matchear esa longitud de onda en distintas realizaciones. Esas respuestas posibles F_1, F_2, F_3 viven en un espacio de tres dimensiones, donde las respuestas para estímulos de longitudes de onda puras dibujan una curva unidimensional. Por lo tanto, si queremos obtener la variabilidad en realizaciones del experimento para cada longitud de onda, necesitamos atravesar ese espacio tridimensional a lo largo del camino habitado por todas las λ_0 del espectro visible en pasos diferenciales $d\lambda$ y luego proyectar estos pasos a lo largo de los ejes coordenados, eso es

$$\Delta_j = \left(\overrightarrow{dF_j}^t J_{CMF} \overrightarrow{dF_j} \right)^{-1/2},$$

donde $j = 1, 2, 3$, para todo λ_0 en el espectro visible. Reemplazando el tensor métrico por el expresado en 7.6,

$$\Delta_j = \pm \frac{dF_j}{\sqrt{\sum_{i=S,M,L} \alpha_i(\lambda_j) q_i(\lambda_j) / q_i(\lambda_0)}}, \quad (7.7)$$

donde $dF_j = dF_1, dF_2, dF_3$, y $dF_j = dF_j(\lambda_0) = F_j(\lambda_0 + d\lambda) - F_j(\lambda_0)$. En el panel izquierdo de la figura 7.2 exponemos las FCM predichas normalizadas para las luces primarias

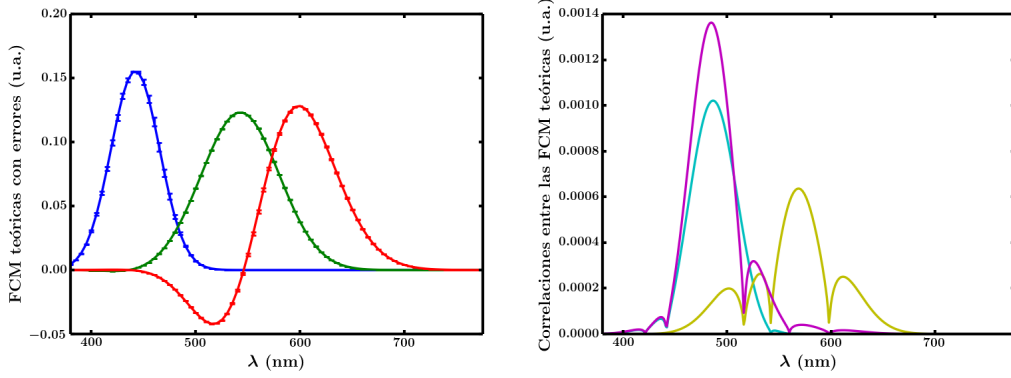


Figura 7.2: Predicción del error para las CMF. Izquierda: Predicción teórica para las funciones de color matching normalizadas de la figura 7.1. Las barras de error son las predichas por el modelo. Derecha: Valor absoluto de la correlación de los errores entre las FCM teóricas del panel de la izquierda en línea sólida y la misma correlación con signo en línea punteada. Magenta: Correlación entre los errores de las curvas roja y azul. Cian: entre azul y verde. Amarillo: entre verde y rojo.

del experimento original con los errores predichos correspondientes. A lo largo de este proceso de matcheo es posible que, para un estímulo de una determinada longitud de onda esa variabilidad entre realizaciones tenga correlaciones y que, por ejemplo, los errores para una FCM estén siempre correlacionados en la misma dirección que los de otra FCM. A través de nuestro análisis podemos obtener también las correlaciones entre los errores (Δ_{jt}) de las FCM teóricas determinadas por los elementos fuera de la diagonal de la matriz de Fisher 7.6,

$$\Delta_{jt} = \pm \sqrt{\frac{dF_i dF_j}{\sum_{i=S,M,L} \alpha_i(\lambda_j) q_i(\lambda_t) / q_i(\lambda_0)}}, \quad (7.8)$$

donde $j \neq t$ y $j, t = 1, 2, 3$. En el panel de la derecha de la figura 7.2 mostramos la correlación entre los errores de las FCM teóricas en valor absoluto. A través del acercamiento teórico derivado en este trabajo no podemos obtener el signo de las correlaciones de los errores para una determinada longitud de onda, sin embargo, sabemos que, como una función del estímulo, las correlaciones atraviesan el cero. En términos generales, encontramos que en aquellas regiones donde las FCM se solapan entre sí, la correlación del error aumenta y que, por el contrario, en aquellas regiones donde las FCM no se solapan, la correlación del error disminuye. Este resultado es razonable, ya que indica que para aquellos estímulos que el sujeto matchea con dos colores primarios, la correlación en la variabilidad de sus respuestas para esas luces es grande. Y que, por el contrario, la correlación entre cualquiera de esos dos colores primarios con el tercero no utilizado para matchear ese estímulo en particular es baja.

7.3. Predicción de las color matching functions más ortogonales

Por otra parte, también advertimos que las FCM originales ($r(\lambda)$, $g(\lambda)$, $b(\lambda)$ de la figura 1.7) son casi ortogonales entre sí. Los productos escalares de las versiones normalizadas con la norma euclídea de esas curvas son:

$$\begin{aligned} \langle r(\lambda), g(\lambda) \rangle &= 0,044, \\ \langle g(\lambda), b(\lambda) \rangle &= 0,018, \\ \langle b(\lambda), r(\lambda) \rangle &= -0,015. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Ya que nuestro modelo nos permite explorar cómo serían las FCM con otras luces primarias, predecimos las primarias que producen el conjunto de FCM más ortogonales. La predicción de las FCM con otros colores primarios y la predicción de FCM ortogonales fue estudiada anteriormente [64–66] a través de un método de álgebra lineal donde los autores deducen un nuevo conjunto de FCM a partir de una transformación lineal sobre las coordenadas CIE 1931 XYZ que presentamos en 2.2.1. Como explicamos en esa sección, estas coordenadas XYZ son a su vez una transformación lineal de las FCM originales. En el trabajo de Worthey [66], el autor deriva un conjunto de FCM ortonormales a partir de un procedimiento de Gram-Schmidt sobre las FCM originales. Sin embargo, no es fácil deducir un conjunto de luces primarias que puedan reproducir esas curvas ortonormales después de un experimento de color matching. Con el fin de encontrar esas luces primarias, nosotras proponemos todas las posibles combinaciones de tres luces primarias dentro del visible (entre 380 nm y 775 nm) con un paso de 5 nm. Luego, calculamos las FCM normalizadas para cada triplete de primarias propuestas y calculamos a su vez el producto escalar entre ellas. Elegimos el triplete de primarias que tiene la menor raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de esos productos escalares, es decir las primarias con mínima

$$\sqrt{\langle F1(\lambda), F2(\lambda) \rangle^2 + \langle F2(\lambda), F3(\lambda) \rangle^2 + \langle F3(\lambda), F1(\lambda) \rangle^2}.$$

Los colores primarios resultantes tienen picos en 455 nm, 550 nm y 625 nm y reproducirían el conjunto de FCM más ortogonales luego de un experimento de color matching. Las FCM resultantes las mostramos en la figura 7.3, y los productos escales entre ellas son:

$$\begin{aligned} \langle F1(\lambda), F2(\lambda) \rangle &= 0,012, \\ \langle F2(\lambda), F3(\lambda) \rangle &= 0,011, \\ \langle F3(\lambda), F1(\lambda) \rangle &= -0,01. \end{aligned} \quad (7.10)$$

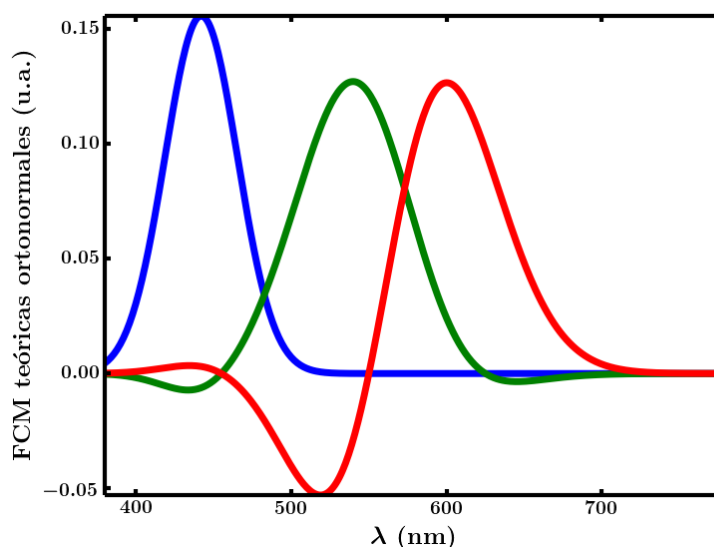


Figura 7.3: Predicción del conjunto de funciones de color matching más ortogonales. Con luces primarias $R = 625$ nm en rojo, $G = 550$ nm en verde y $B = 455$ nm en azul.

A pesar de la diferencia entre estos colores primarios y los que se usaron en el experimento original, el producto escalar entre las correspondientes FCM no son tan diferentes, y ambos conjuntos de curvas son muy similares en cuanto a la forma. La curva roja también presenta intensidades negativas en el mismo rango del espectro visible. Ambos conjuntos de curvas mantienen la altura relativa de una de las funciones comparada con la de las otras dos. La única diferencia visible aparece en la función verde, ya que la curva original es siempre positiva, mientras que la nueva función verde tiene algunos valores negativos alrededor de 440 nm.

7.4. Predicción de color matching functions positivas

En materia de colorimetría, cualquier color se puede representar dentro de un espacio de colores a través de un conjunto de coordenadas, entonces evaluar las FCM en una longitud de onda λ_0 en particular nos da las coordenadas de un haz monocromático caracterizado por esa longitud de onda. Sin embargo, este conjunto de coordenadas presenta valores negativos en la coordenada roja para los haces monocromáticos alrededor de 500 nm, y por este motivo, muchos espacios de color tienen coordenadas de cromaticidad basadas en las coordenadas XYZ en lugar de las FCM (ver sección 2.1). Las CIE 1931 XYZ son el resultado de una transformación lineal sobre las FCM originales, calculadas con el único propósito de obtener tres curvas no negativas dentro del espectro visible. Sin embargo, no existen tres colores primarios que puedan reproducir

las curvas $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ y $Z(\lambda)$ bajo un experimento de color matching. Uno de nuestros logros es poder predecir el conjunto de colores primarios *reales* que pueden reproducir FCM siempre positivas. Para conseguir ese conjunto de luces primarias, propusimos todas las combinaciones de luces expuestas anteriormente y nos quedamos con la combinación de primarias que exponían curvas positivas en la mayor parte del visible. El triplete resultante corresponde a luces con picos en 380 nm, 510 nm y 775 nm y las FCM predichas normalizadas se muestran en la figura 7.4. Una de las luces resultantes

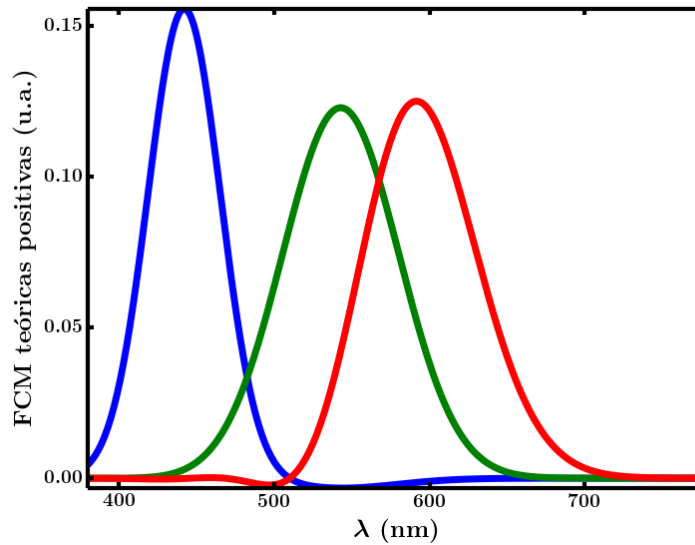


Figura 7.4: Predicción de las funciones de color matching con intensidades positivas en el espectro visible. Las luces primarias tienen picos en 380 nm, 510 nm y 775 nm y están representadas con azul, verde, y rojo, respectivamente.

tiene un pico en la primera longitud de onda del visible, la siguiente se encuentra en el centro del espectro, y la tercera corresponde a la última que se puede ver. Estas funciones son casi siempre positivas, excepto por algunos valores negativos en las curvas azul y roja que alcanzan intensidades de $-0,003$ y $-0,002$, respectivamente.

7.5. Conclusión

En esta sección exponemos una deducción de las curvas resultantes del experimento de color matching para el observador estándar reportadas por la CIE, a partir de nuestro modelo y la métrica de Fisher. Nuestro análisis está centrado en la estadística de la absorción de fotones por los conos de la retina del observador en la situación de matcheo del experimento, donde el sujeto visualiza dos campos iluminados por luces con composiciones espectrales diferentes que percibe como colorimétricamente iguales. Gracias a que este acercamiento nos permite predecir, de primeros principios, los resultados del experimento de color matching con las luces primarias originales, presentamos

también la predicción de las curvas para otros conjuntos de luces que pueden ser de interés. Es así como observando que las funciones originales son casi ortogonales entre sí, presentamos el conjunto de luces que mostrarían las curvas de color matching más ortonormales luego de realizar el experimento con esas luces. Esta exploración estuvo estudiada por Worthey quien, a través de un procedimiento de Gram-Schmidt sobre las funciones originales, obtiene un conjunto de curvas ortonormales. Sin embargo, no es evidente que esas curvas se puedan obtener de un experimento de color matching. Más aún, su deducción no está basada en un modelo sobre el sistema visual que permita explicar los procesos que tienen lugar en el cerebro del observador mientras realiza la tarea. Mientras que nuestro modelo, que tiene en cuenta únicamente la etapa de procesamiento de los fotorreceptores, puede explicar las FCM originales. Mediante una extensión del análisis, podemos predecir además la variabilidad entre realizaciones para cada estímulo testeado, así como también las correlaciones entre esos errores. Por último, presentamos el triplete de luces que mostrarían funciones de color matching positivas ante todos los estímulos de longitudes de onda pura dentro del espectro visible.

Capítulo 8

Conclusiones

“El color provoca una vibración psíquica, esconde un poder que aún se desconoce”

— Wassily Kandinsky

El punto de partida de este trabajo estuvo centrado en el desarrollo de un modelo de ruido que describe el proceso de absorción de fotones por parte de los fotorreceptores de la retina de un observador, para luego analizar hasta qué punto ese modelo alcanza para explicar resultados de experimentos perceptuales en visión cromática. A través de nuestro modelo caracterizamos uno de los procesos estocásticos que tienen lugar en la retina cuando el observador visualiza un haz de luz con una composición arbitraria. Para la descripción de este proceso únicamente tuvimos en cuenta la absorción de fotones en los fotorreceptores. Más aún, dentro de los fotorreceptores, sólo consideramos la acción de los conos y descartamos la acción de los bastones, ya que en el régimen lumínico en el que se realizaron los experimentos los bastones se encuentran saturados. Los fotorreceptores tienen la capacidad de capturar fotones de determinadas longitudes de onda, es decir, tienen un rango de longitudes de onda al que son sensibles. Cuando una fuente de luz ilumina la retina, los fotorreceptores pueden absorber un determinado número de los fotones incidentes, y luego traducir esa información al resto del cerebro en forma de señales eléctricas. El camino visual está compuesto por numerosas etapas posteriores, la salida de los fotorreceptores es procesada primero por las células bipolares y ganglionares en la misma retina, luego la información continua hacia el tálamo y, más tarde por la corteza cerebral. El modelo de ruido que proponemos explica la estadística de absorción de fotones únicamente y, por lo tanto, no tiene en cuenta el procesamiento posterior que sufre la información a lo largo del camino visual.

A partir del modelo que describimos en este trabajo deducimos la distribución de probabilidad conjunta de que los conos de tipo S , M y L absorban un conjunto de números K_S , K_M y K_L de fotones cuando se ilumina la retina con una fuente de luz de una determinada composición espectral, es decir, de un determinado color. Este es

un proceso estocástico, ya que un fotón que incide sobre la retina puede caer sobre un fotorreceptor de tipo S , M o L . Además, puede o no ser absorbido por este con cierta probabilidad. Los fotorreceptores son más o menos sensibles a fotones de determinadas longitudes de onda, y las probabilidades de absorción de los distintos fotorreceptores en función de la longitud de onda se solapan. Para la mayoría de las fuentes de luz, no conocemos el número exacto de fotones por unidad de tiempo y, por lo tanto, la distribución de probabilidad conjunta es un producto de distribuciones poissonianas, donde cada factor involucra a una variable K_i diferente. Cada uno de estos factores depende de la proporción de conos de tipo i presente en la retina del observador. Por ende, la absorción de un fotón por un fotorreceptor es independiente de la absorción de otro fotón por otro fotorreceptor, sea o no del mismo tipo. A diferencia de otros modelos fenomenológicos propuestos en la literatura, nuestro modelo fue derivado de primeros principios.

A partir de este modelo, estudiamos en qué medida podemos explicar algunos de los resultados de experimentos comportamentales realizados por seres humanos conscientes. Vale decir, experimentos donde los sujetos realizan una tarea de manera consciente y donde los datos que se obtienen son el resultado de un reporte realizado por el observador. Por lo tanto, si bien es de esperar que la etapa de absorción de fotones en los fotorreceptores condicione el desempeño del observador al realizar esa tarea, nada indica que esta única etapa alcance para explicarlos.

Antes de analizar en profundidad el alcance de nuestro modelo, nos encontramos con la dificultad de interpretar los resultados experimentales conocidos por estar reportados en distintos espacios de color. Si los estímulos utilizados en el experimento provienen de fuentes monocromáticas, típicamente la representación utilizada es la escala métrica para representar la longitud de onda característica del haz incidente. Mientras que, si la fuente de luz contiene espectros de composición arbitraria, los resultados se reportan en espacios de color contruidos en base a resultados de experimentos perceptuales. Estos espacios tienen típicamente tres dimensiones, vinculadas al hue, saturación y luminosidad de la luz. Frecuentemente, se considera que la luminosidad no forma parte de las características puramente cromáticas de la luz y, por lo tanto, se fija como una constante, quedando un espacio cromático bidimensional.

En primer lugar, estudiamos cuál es la mejor estimación del estímulo presentado que puede hacerse a partir del modelo de absorción. En el caso monocromático, bien podría suceder que la representación que el cerebro del observador tiene para cada longitud de onda (λ) presente un sesgo. Sin embargo, dado nuestro modelo de ruido, obtenemos que la mejor estimación del estímulo presentado es el mismo estímulo y, por ende, no presenta sesgos. Por otra parte, nos encontramos con el inconveniente de querer comparar resultados experimentales medidos sobre distintos espacios de color y no saber hasta qué punto la diferencia en los resultados depende de la representación subyacente.

Por ejemplo, si un experimento muestra que los humanos percibimos con mayor agudeza el color azul que el verde, podría suceder que este resultado sea sólo consecuencia de que en la representación elegida, el color verde ocupe un área mucho mayor a la del color azul. La mayoría de los espacios de color conocidos fueron construidos en base a decisiones heurísticas, por lo tanto, es fundamental verificar que las conclusiones de un dado estudio describen propiedades perceptuales, y no propiedades del espacio elegido.

Uno de los objetivos de nuestro trabajo estuvo centrado en desarrollar un formalismo que nos permita derivar una métrica en el espacio de color a partir de nuestro modelo de representación de color en el cerebro. Para ello, utilizamos la información de Fisher, ya que nos provee una métrica con la que podemos construir una geometría y una noción de distancia en el espacio de parámetros a partir del efecto que esos parámetros tienen sobre variables fisiológicas aleatorias. En el sistema visual, esto significa que el espacio de colores percibidos puede estar equipado con una noción de distancia basada en la información acerca de la distribución de probabilidad de la actividad neuronal, a medida que cambiamos las propiedades del estímulo incidente. Dos haces de luz pueden tener espectros similares, y sin embargo producir respuestas neuronales marcadamente diferentes. Por lo tanto, aun cuando dos haces de luz tengan propiedades físicas muy similares, pueden ser muy disímiles en términos perceptuales. En este trabajo, derivamos la métrica de Fisher a partir de la distribución de probabilidad de absorción de fotones por parte de los conos, y mostramos que la noción de distancia entre colores vecinos para esa métrica explica el 87 % de la habilidad con que los observadores humanos discriminamos estímulos cromáticos en los experimentos comportamentales. Dado que contamos con un modelo que explica en gran medida la discriminación cromática en humanos tricrómatas, extendimos el análisis a sujetos con retinas de diferente composición y realizamos predicciones acerca de su habilidad para discriminar colores cercanos. Estudiamos así, los casos de sujetos daltónicos que poseen dos tipos de conos en lugar de tres, y los casos tetracrómatas de pájaros estríldidos que poseen cuatro tipos de conos con sensibilidad espectral muy diferente a la humana, y el caso de la única tetracrómata humana analizada sistemáticamente hasta el momento.

Nuestra teoría reproduce en gran medida la varianza de los datos experimentales de observadores con retinas de composición diferente. Esto nos permitió construir un espacio perceptualmente uniforme ajustado a la retina de cada observador. En él, los colores están representados de manera tal que la distancia euclídea entre pares de colores coincide con la distancia perceptual, es decir que allí, dos colores que están separados a una distancia de una determinada longitud entre sí, se discriminan con la misma precisión que otro par de colores separados por una distancia de la misma longitud.

Por otra parte, analizamos el experimento de sensibilidad a la luminosidad espectral medida tanto para personas tricrómatas como para personas dicrómatas. Nosotras pro-

pusimos la luminosidad aparente como el promedio de la suma del número de fotones absorbidos por todos los conos y encontramos que el resultado de ese promedio calculado con la distribución de probabilidad que se deriva de nuestro modelo de la lluvia de fotones, coincide en gran medida con la sensibilidad a la luminosidad. Demostramos con él que podemos predecir el resultado de la sensibilidad a la luminosidad espectral tanto para sujetos tricrómatas como para sujetos dicrómatas. A pesar de que la luminosidad es una característica de la luz que históricamente se consideró acromática, aquí demostramos un cómputo que, en el marco de nuestro modelo, explica en gran medida los resultados experimentales, dando evidencia de lo contrario.

Por último, a partir de nuestro modelo de ruido, dedujimos las curvas resultantes del experimento de color matching para el observador estándar reportadas por la CIE. Predecimos tanto la forma como las alturas de las tres curvas de color matching para la terna de luces utilizadas en el experimento original, luego extendimos la predicción para otros conjuntos de luces. A través del modelo logramos identificar también el conjunto de luces que producen curvas de color matching máximamente ortonormales. Mediante una extensión del análisis, podemos predecir además la varialibidad entre realizaciones para cada estímulo testeado, así como también las correlaciones entre esos errores.

Muchos de los espacios de color sobre los que se proyectan resultados perceptuales están basados en las funciones de color matching originales, sin embargo, estas presentan valores negativos para la luz roja y, por lo tanto, se realizaron transformaciones de coordenadas hacia sistemas donde todos los colores se pueden representar con coordenadas no-negativas. Nosotras predecimos el triplete de luces que mostrarían funciones de color matching positivas ante todos los estímulos de longitudes de onda pura dentro del espectro visible luego de un experimento de color matching.

Los modelos del sistema visual ya existentes intentan explicar con mayor detalle la transmisión de información entre las distintas etapas del sistema visual, y por lo tanto involucran una mayor complejidad que el modelo que describimos en este trabajo, y están basados sobre fundamentos heurísticos. A pesar de haber ignorado desde la variación de voltaje en los segmentos internos de los fotorreceptores, hasta las etapas de procesamiento de color posteriores a la etapa de absorción, nuestro modelo predice, en gran medida, los resultados comportamentales realizados por seres humanos conscientes. De la teoría de la información sabemos que las etapas de procesamiento posteriores pueden, o bien mantener la información o bien empeorarla, pero no mejorarla. El gran acuerdo entre los resultados predichos y los obtenidos experimentalmente implica que, en las situaciones que relatamos en este trabajo, las etapas posteriores de procesamiento transmiten información de manera óptima. O bien, si pierden información, lo hacen en una manera tal que la cantidad de información no varía significativamente a medida que nos movemos en el espacio de color.

Bibliografía

- [1] da Fonseca, M., Vattuone, N., Clavero, F., Echeveste, R., Samengo, I. The subjective metric of remembered colors: An information-theoretical analysis of the geometry of human chromatic memory (submitted). *PlosOne*, **30** (6), 2018. [1](#)
- [2] Smeulders, N., Campbell, F. W., Andrews, P. R. The role of delineation and spatial frequency in the perception of the colours of the spectrum. *Vision Research*, **34** (7), 927–936, 1994. [1](#), [2](#)
- [3] Finger, S. *Origins of Neuroscience*. Oxford: Oxford, 2001. [1](#), [2](#), [6](#)
- [4] Hubel, D. *Eye, Brain and Vision*. New York: Scientific American Library, 1988. [3](#), [4](#), [5](#)
- [5] Barbur, J. L., Stockman, A. Photopic, mesopic and scotopic vision and changes in visual performance. *Encyclopedia of the Eye*, **3**, 323–331, 2010. [4](#), [5](#)
- [6] Bowmaker, J. K., Dartnall, H. J. Visual pigments of rods and cones in a human retina. *The Journal of Physiology*, **298** (1), 501–511, 1980. [5](#)
- [7] Colorblindor. <http://www.color-blindness.com>, 2016. Urldate: 2016. [6](#), [8](#)
- [8] Nathans, J., Thomas, D., Hogness, D. Molecular genetics of human color vision: the genes encoding blue, green, and red pigments. **232** (4747), 193–202, 1986. [7](#)
- [9] Stockman, A., Brainard, D. H. *Handbook of Optics*, cap. Color vision mechanisms, págs. 1–104. New York: McGraw-Hill, 2009. [7](#), [8](#), [27](#), [48](#), [66](#), [75](#)
- [10] Jordan, G., Deeb, S. S., Bosten, J. M., Mollon, J. D. The dimensionality of color vision in carriers of anomalous trichromacy. *Journal of Vision*, **8** (10), 1–19, 2010. [8](#), [52](#)
- [11] Wyszecki, G., Stiles, W. S. *Color Science: Concepts and Methods, Quantitative Data and Formulae*. New York: Wiley Interscience, 2000. [8](#), [9](#), [10](#), [12](#), [19](#), [21](#), [31](#), [45](#), [54](#), [56](#), [61](#), [62](#), [73](#), [74](#)

- [12] Kaiser, P. K. The joy of visual perception. <http://www.yorku.ca/eye/>, 1996. Urldate: Feb 2017. 9
- [13] Judd, D. B., Vos, J. J. Modified cie 2-deg photopic luminosity curve. <http://www.cvrl.org/database/text/lum/vljv.htm>, 1978. Urldate: Feb 2017. 10
- [14] Sharpe, L. T., Stockman, A., Jagla, W., Jgle, H. A luminous efficiency function, $v^*(\lambda)$, for daylight adaptation. *Journal of Vision*, **5** (11), 3, 2005. 10, 49
- [15] Stiles, W. S., Burch, J. M. Stiles & burch 2-deg color matching functions. <http://www.cvrl.org/>, 1955. 11, 77
- [16] Fundamental chromaticity diagram with physiological axes. <http://www.cvrl.org/>, 2006. 13
- [17] Ciexy1931. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:CIExy1931.png>, 2005. Urldate: Jun 2005. 13
- [18] Malacara, D. Color Vision and Colorimetry: Theory and Applications. Bellingham: Spie, 2011. 14, 21, 31, 61, 62, 74
- [19] Derrington, A. M., Krauskopf, J., Lennie, P. Chromatic mechanisms in lateral geniculate nucleus of macaque. *Journal of Physiology*, **357** (1), 241–265, 1984. 14, 58, 62
- [20] Hansen, T., Gegenfurtner, K. R. Classification images for chromatic signal. *Journal of the Optical Society of America. A, Optics, image science, and vision*, **22**, 2081–9, 11 2005. 15
- [21] Wright, W. D., Pitt, F. H. G. Hue discrimination in normal colour vision. *Proceedings of the Physical Society*, **46** (3), 459–473, 1934. 16, 64
- [22] Pokorny, J., Smith, V. C. Wavelength discrimination in the presence of added chromatic fields. *Journal of the Optical Society of America*, **60** (4), 562–569, 1970. 16
- [23] MacAdam, D. L. Visual sensitivities to color differences in daylight. *Journal of the Optical Society of America*, **32** (5), 247–274, 1942. 16, 57, 64
- [24] Krauskopf, J., Gegenfurtner, K. Color discrimination and adaptation. *Vision Research*, **32** (11), 2165–2175, 1992. 17, 24, 29, 58
- [25] Amari, S. I., Nagaoka, H. Methods in information Geometry. Oxford: Oxford, 2000. 22, 23, 47, 75

-
- [26] Cover, T., Thomas, J. A. Elements of Information Theory. New York: Wiley, 1991. [24](#)
- [27] Klauke, S., Wachtler, T. Tilt in color space: Hue changes induced by chromatic surrounds. *Journal of Vision*, **15** (13), 17, 2015. [24](#)
- [28] Pant, D. R., Farup, I. Riemannian formulation and comparison of color difference formulas. *Color Research and Application*, **37** (6), 429 – 440, 2011. [26](#)
- [29] Vorobyev, M., Osorio, D. Receptor noise as a determinant of colour thresholds. *Proceedings of the Royal Society of London B: Biological Sciences*, **265** (1394), 351–358, 1998. [26](#)
- [30] da Fonseca, M., Samengo, I. Derivation of human chromatic discrimination ability from an information-theoretical notion of distance in color space. *Neural Computation*, **28** (12), 2628–2655, 2016. [32](#), [37](#), [65](#), [70](#)
- [31] Zhaoping, L., Geisler, W. S., May, K. A. Human wavelength discrimination of monochromatic light explained by optimal wavelength decoding of light of unknown intensity. *PLoS ONE*, **6** (5), e19248, 2011. [36](#), [48](#), [65](#)
- [32] Cramér, H. A contribution to the theory of statistical estimation. *Scandinavian Actuarial Journal*, **1946** (1), 458–463, 1946. [47](#), [65](#)
- [33] Dayan, P., Abbot, L. F. Theoretical Neuroscience. Computational and Mathematical Modeling of Neural Systems. Cambridge: MIT Press, 2001. [48](#)
- [34] Hofer, H., Carroll, J., Neitz, J., Neitz, M., Williams, D. R. Organization of the human trichromatic cone mosaic. *Journal of Neuroscience*, **25** (42), 9669 – 9679, 2005. [49](#)
- [35] Roorda, A., Williams, D. D. The arrangement of the three cone classes in the living human eye. *Nature*, **397**, 520–522, 1999. [49](#)
- [36] Sperling, H. G., Harwerth, R. S. Red-green cone interactions in the increment-threshold spectral sensitivity of primates. *Science*, **172** (3979), 180–184, 1971. [50](#)
- [37] Hart, N., Partridge, J., Bennett, A., Cuthill, I. Visual pigments, cone oil droplets and ocular media in four species of estrildid finch. *Journal of Comparative Physiology A*, **186** (7), 681–694, Aug 2000. [52](#)
- [38] Rose, A. The sensitivity performance of the human eye on an absolute scale*. *J. Opt. Soc. Am.*, **38** (2), 196–208, Feb 1948. [54](#)

- [39] DeVries, H. L. The quantum character of light and its bearing upon threshold of vision, the differential sensitivity and the visual acuity of the eye. *Physica*, **7** (10), 553 – 564, Jul 1943. [54](#)
- [40] Rovamo, J. M., KanKaanpää, M. I., Hallikainen, J. Spatial neural modulation transfer function for human foveal visual system for equiluminous chromatic gratings. *Vision Research*, **41** (13), 1659–1667, jun 2001. [54](#)
- [41] Duchi, J. C. Derivations for linear algebra and optimization. resource document. http://ai.stanford.edu/~jduchi/projects/general_notes.pdf, 2014. Urldate: Jan 2016. [56](#)
- [42] Koenderink, J. J., Van Doorn, A. J. Colour Perception: Mind and the physical world, cap. Perspectives on colour space, págs. 1–56. Oxford: Oxford University Press, 2003. [61](#)
- [43] Munsell, A. H. A pigment color system and notation. *The American Journal of Psychology*, **23** (2), 236–244, 1912. [61](#)
- [44] Landa, E. R., Fairchild, M. D. Charting color from the eye of the beholder. *American Scientist*, **93** (5), 436443, 2005. [61](#)
- [45] MacAdam, D. L. On the geometry of color space. *Journal of the Franklin Institute*, **238** (5), 195–201, 1944. [62](#)
- [46] Gravesen, J. The metric of colour space. *Graphical Models*, **82**, 77–86, 2015. [63](#)
- [47] Holtsmark, T. Colour discrimination and hue. *Nature*, **224** (5217), 366–367, 1969. [64](#)
- [48] Atick, J. J. Could information theory provide an ecological theory of sensory perception? network: Computation in neural systems. *Network: Computation in neural systems*, **3** (2), 213–251, 1992. [66](#), [67](#)
- [49] Bruton, D. Rgb values for visible wavelengths. <http://www.physics.sfasu.edu/astro/color/spectra.html>, 1996. Urldate: Feb 1996. [69](#)
- [50] Silberstein, L. Investigations on the intrinsic properties of the color domain. *Journal of the Optical Society of America*, **33** (1), 1–10, 1943. [69](#)
- [51] van der Twer, T., MacLeod, D. I. A. Optimal nonlinear codes for the perception of natural colours. *Network: Computation in Neural Systems*, **12** (3), 395–407, 2001. [70](#)

- [52] MacLeod, D. I. A., van der Twer, T. The pleistochrome: Optimal opponent codes for natural colours. *Colour Perception: Mind and the Physical World*, 2003.
- [53] MacLeod, D. A. Colour discrimination, colour constancy, and natural scene statistics. *Normal and defective colour vision*, págs. 189–218, 2003. [70](#)
- [54] Laparra, V., Jiménez, S., Camps-Valls, G., Malo, J. Nonlinearities and adaptation of color vision from sequential principal curves analysis. *Neural Computation*, **24** (10), 2751–2788, 2012. [70](#)
- [55] Laparra, V., Malo, J. Visual aftereffects and sensory nonlinearities from a single statistical framework. *Frontiers in Human Neuroscience*, **9**, 557, 2015. [70](#)
- [56] Laughlin, S. B. A simple coding enhances a neurons information capacity. *Zeitschrift fr Naturforschung*, **36c**, 91012, 1981. [70](#)
- [57] Srinivasan, M. V., Laughlin, S. B., Dubs, A. Predictive coding: A fresh view of inhibition in the retina. *Proceedings of the Royal Society of London B*, **216** (1205), 427–459, 1982.
- [58] Laughlin, S. B. Matching coding to scenes to enhance efficiency. *Physical and Biological Processing of Images*, **11**, 42–52, 1983.
- [59] Bell, A. J., Sejnowski, T. J. An information-maximization approach to blind separation and blind deconvolution. *Neural Computation*, **7** (6), 1129–1159, 1995. [70](#)
- [60] Malo, J., Laparra, V. Psychophysically tuned divisive normalization approximately factorizes the pdf of natural images. *Neural Computation*, **22** (12), 3179–3206, 2010. [70](#)
- [61] Laparra, V., Muñoz Marí, J., Malo, J. Divisive normalization image quality metric revisited. *J. Opt. Soc. Am. A*, **27** (4), 852–864, Apr 2010. [70](#)
- [62] Berardino, A., Laparra, V., Ball, J., Simoncelli, E. P. Eigen-distortions of hierarchical representations. *Advances in Neural Information Processing Systems 30 (NIPS 2017) pre-proceedings*, **30**, 2017. [70](#)
- [63] Kullback, S. Information theory and statistics. New York: John Wiley and Sons, 1959. [75](#)
- [64] Thornton, W. A. Spectral sensitivities of the normal human visual system, color-matching functions and their principles, and how and why the two sets should coincide. *Color research and application*, **24**, 139156, 1999. [80](#)

- [65] Brill, M. H., Worthey, J. A. Color matching functions when one primary wavelength is changed. *Color research and application*, **32**, 2224, 2007.
- [66] Worthey, J. A. Vectorial color. color research and application. *Color research and application*, **37**, 394409, 2012. [80](#)

Publicaciones asociadas

1. da Fonseca, M. & Samengo, I., Derivation of human chromatic discrimination ability from an information-theoretical notion of distance in color space. **Neural Computation**, 28(12):2628–2655, 2016.
2. da Fonseca, M. & Samengo, I., Novel perceptually uniform chromatic space. **Neural Computation**, 30(6), 2018.
3. da Fonseca, M., Vattuone N., Clavero F., Echeveste R. and Samengo, I., The subjective metric of remembered colors: An information-theoretical analysis of the geometry of human chromatic memory (submitted). **PlosOne**, 2018.
4. da Fonseca, M. & Samengo, I., Prediction of the results of color-matching experiments from a statistical model of cone absorption properties. (en preparación)

Agradecimientos

A las ciudadanas y los ciudadanos del Estado Argentino por contribuir en el financiamiento de mi beca. Al Instituto Balseiro por formarme académicamente. A Inés por formarme tanto académica como profesionalmente.

A mi familia por apoyarme. En especial a Emma y Mainqué por acompañarme.

A mis amigas y amigos por todos los momentos compartidos.

